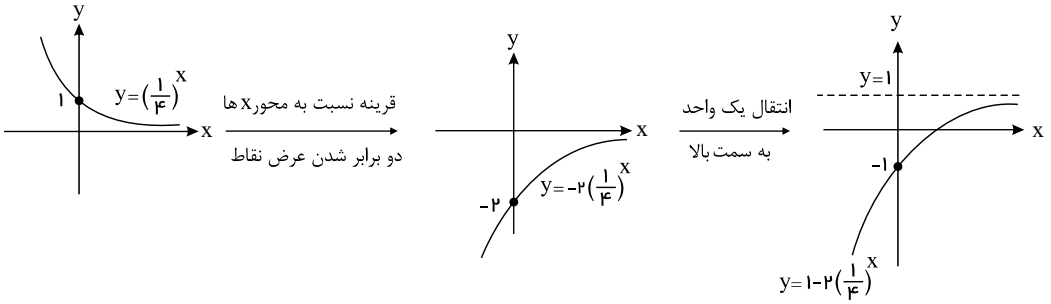
پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۱

$$f(x) = ۱ - ۲^{۱-۲x} = ۱ - (۲^{۱} \times ۲^{-۲x}) = ۱ - ۲(\frac{۱}{۲^{۲}})^{x} \to f(x) = ۱ - ۲(\frac{۱}{۴})^{x}$$



نمودار تابع از ناحیهٔ دوّم عبور نمی‌کند.

۲ ـ گزینه ۳ می دانیم تابع $y = ۲^{x}$ وقتی محور y ها را قطع می کند که $x = ۰$ باشد . پس : $y = ۲^{۰} = ۱$

پس نقطه ی $A(۰, ۱)$ به دست آمد و چون نقطه ی B در معکوس تابع صدق می کند پس جای x و y عوض می شوند. و $B(۱, ۰)$ است. حال فاصله ی نقاط A و B را به دست آوریم:

$$AB = \sqrt{(۰ - ۱)^{۲} + (۱ - ۰)^{۲}} = \sqrt{۲}$$

۳ ـ گزینه ۲ تابع نمایی $y = a^{x} + k$ همواره نزولی است هرگاه $۰ < a < ۱$ باشد و همواره صعودی است هرگاه $a > ۱$ باشد نیز داریم:

$$۰ < ۵r - ۴ < ۱ \Rightarrow ۴ < ۵r < ۵ \Rightarrow \frac{۴}{۵} < r < ۱$$

۴ ـ گزینه ۲ در تابع $f(x)$ به جای متغیر x، مقدار ۰ و ۱ قرار می‌دهیم و مقادیر a و b بدست می‌آیند:

$$f(۰) = ۱ \Rightarrow f(۰) = ۲a \cdot b^{۰} = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

$$f(-۱) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow f(-۱) = ۲ \times \frac{۱}{۲} \cdot b^{-۱} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{b} = \frac{۱}{۴} \to b = ۴$$

$$f(x) = ۲ \times \frac{۱}{۲} \cdot ۴^{x} = ۴^{x} \Rightarrow f(\frac{۲}{۳}) = ۴^{\frac{۲}{۳}} (۲^{۲})^{\frac{۲}{۳}} = ۲^{\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۳]{۲^{۴}} = ۲\sqrt[۳]{۲}$$

۵ ـ گزینه ۳ نمودار تابع داده شده قرینهٔ یک تابع نمایی نزولی نسبت به محور xها است که دو واحد به بالا انتقال داده شده است، پس $a = ۲$، لذا خواهیم داشت:

$$y = ۲ - b^{x+c}$$

نقاط $\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۱ \end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix} ۰ \\ \frac{۵}{۳} \end{matrix}\right.$ **روی نمودار تابع قرار دارند، بنابراین:**

$$\left|\begin{matrix} ۰ \\ \frac{۵}{۳} \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{۵}{۳} = ۲ - b^{۰+c} \Rightarrow b^{c} = \frac{۱}{۳} \quad (\star)$$

$$\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۱ \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱ = ۲ - b^{-۱+c} \Rightarrow b^{-۱+c} = ۱ \Rightarrow b^{-۱} \times b^{c} = ۱ \xrightarrow{(\star)} \frac{۱}{۳} b^{-۱} = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۳}\ ,\ c = ۱$$

درنتیجه:

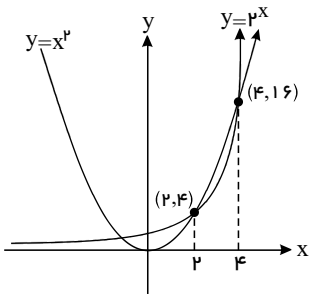
$$۳b + a + c = ۳ \times \frac{۱}{۳} + ۲ + ۱ = ۴$$

۶ ـ گزینه ۲

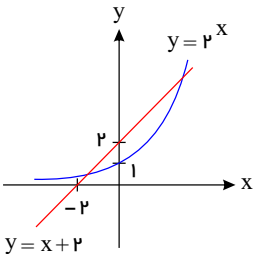
از دو طرف ریشهٔ سوم می گیریم:

$$\sqrt[۳]{۲^{۳x}} = \sqrt[۳]{x^{۶}} \to ۲^{x} = x^{۲}$$

با توجه به شکل مقابل، این معادله دو ریشهٔ مثبت دارد:



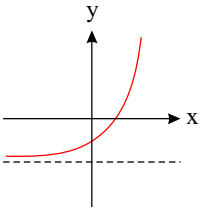
۷ - گزینه ۳ کافی است دو تابع $y_1 = x + ۲$ و $y_۲ = ۲^x$ را رسم کنیم.



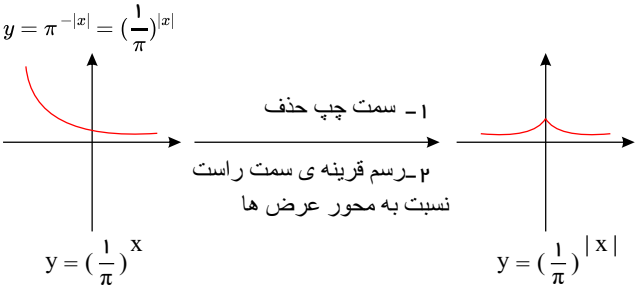
واضح است خط و منحنی همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. $\rightarrow$

۸ - گزینه ۴

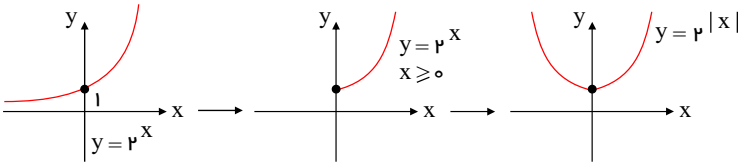
داریم $f(x) = ۲(۲^{x-۱} - ۱) \Rightarrow y = ۲^x - ۲$ نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع f از ناحیه‌ی دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد. از آن جا که نمودار تابع f و نمودار وارون آن نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات قرینه هستند، پس نمودار وارون تابع f از ناحیه‌ی چهارم دستگاه مختصات نخواهد گذاشت.



۹ - گزینه ۲ برای رسم نمودار $y = f(|x|)$ باید قسمت چپ محور yها پاک شود و قرینه‌ی قسمت راست نسبت به محور yها در سمت چپ محور yها رسم شود.



۱۰ - گزینه ۲ برای رسم توابع $y = f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را با شرط $x \geq ۰$ رسم کرده و سپس قرینه‌ی شکل را نسبت به محور yها رسم می‌کنیم و به شکل اضافه می‌کنیم.



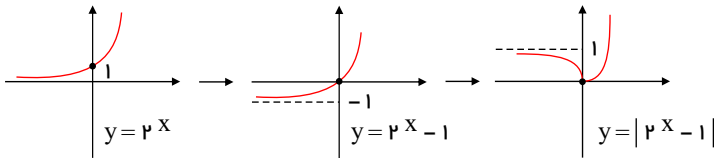
۱۱ - گزینه ۳ تابع نمایی $y = a^x$ وقتی اکیداً نزولی است که $۰ < a < ۱$ باشد.

پس شرط این که تابع نمایی مورد نظر، اکیداً نزولی باشد، این است که $۰ < |a+۲| - ۱ < ۱$ باشد پس:

$$۰ < |a+۲| - ۱ < ۱ \Rightarrow ۱ < |a+۲| < ۲ \rightarrow \begin{cases} |a+۲| > ۱ \rightarrow \begin{cases} a+۲ > ۱ \rightarrow a > -۱ \\ \text{یا} \\ a+۲ < -۱ \rightarrow a < -۳ \end{cases} \\ |a+۲| < ۲ \rightarrow -۲ < a+۲ < ۲ \rightarrow -۴ < a < ۰ \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های بدست‌آمده به جواب $-۴ < a < -۳ \cup -۱ < a < ۰$ می‌رسیم.

۱۲ - گزینه ۴



برای رسم توابع به فرم $y=|f(x)|$ هر آنچه از شکل تابع $y=f(x)$ زیر محور xها است آئینه‌وار به بالا منتقل می‌کنیم.

۱۳ - گزینه ۴ تابع $y=a^x$ به شرطی تابع نمایی است که $a>0$ و $a\neq 1$ باشد.

$$\frac{2a-3}{a+2}>0 \rightarrow$$

a	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
عبارت >0		$+$	ن	$-$	0	$+$	

$\rightarrow a<-2$ یا $a>\frac{3}{2}$

$$\frac{2a-3}{a+2}\neq 1 \rightarrow 2a-3\neq a+2 \rightarrow a\neq 5$$

بنابراین مجموعه‌ی مقادیر a به صورت $(-\infty,-2)\cup(\frac{3}{2},+\infty)-\{5\}$ است.

۱۴ - گزینه ۲ تابع $y=3^{-x}$ در سمت $+\infty$ به محور x ها نزدیک می‌شود. این تابع b واحد انتقال عمودی داشته و به $y=-1$ نزدیک شده، پس $b=-1$. در نتیجه $f(x)=3^{a-x}-1$ است و با توجه به $A(2,0)$، داریم:

$$0=3^{a-2}-1\Rightarrow 3^{a-2}=1\Rightarrow a-2=0\Rightarrow a=2$$

در نتیجه:

$$a-b=2-(-1)=3$$

۱۵ - گزینه ۱ به‌ازای xهای منفی، نمودار y_1 بالاتر از $(\frac{1}{3})^x$ قرار دارد، لذا پایهٔ تابع نمایی y_1 باید مقداری مثبت و کوچک‌تر از $(\frac{1}{3})$ باشد. ضمناً به‌ازای xهای مثبت، نمودار y_2 پایین‌تر از نمودار 5^x است. پس پایهٔ تابع نمایی y_2 باید مثبت باشد و کم‌تر از ۵ باشد.