

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$\log_k^{a^n} = n \log_k^a, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \text{ می‌دانیم:}$$

$$2 \log x - \log(x+2) = 1 \rightarrow \log x^2 - \log(x+2) = 1$$

$$\rightarrow \log \frac{x^2}{x+2} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{x^2}{x+2} = 10 \rightarrow x^2 - 10x - 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 + 80 = 180 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{2} = 5 + 3\sqrt{5} \\ x = \frac{10 - 6\sqrt{5}}{2} = 5 - 3\sqrt{5} \end{cases} \text{ (جلوی لگاریتم را منفی می‌کند) غ ق ق}$$

۲ - گزینه ۴

$$\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \text{ می‌دانیم:}$$

$$\log_7^{2x^2+1} - \log_7^{x+2} = 1 \rightarrow \log_7^{\frac{2x^2+1}{x+2}} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x^2+1}{x+2} = 7^1$$

$$\rightarrow 2x^2 + 1 = 7x + 6 \rightarrow 2x^2 - 7x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه \log_7^{2x-1} فقط به جای x ، می‌توانیم مقدار $x = \frac{5}{2}$ را جایگزین کنیم، زیرا $x = -1$ جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_7^{2x-1} \xrightarrow{x=\frac{5}{2}} \log_7^{2(\frac{5}{2})-1} = \log_7^2 = \log_{7^{\frac{1}{2}}}^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

۳ - گزینه ۴

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_k^{a^n} = n \log_k^a \text{ می‌دانیم:}$$

$$\log_x^{x^2+4} = 1 + \log_x^4 \Rightarrow \log_x^{x^2+4} = \log_x^x + \log_x^4 \Rightarrow \log_x^{x^2+4} = \log_x^4 \Rightarrow x^2 + 4 = 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = 4 \end{cases} \text{ (مبنا نمی‌تواند یک باشد) غ ق ق}$$

$$\log_x^x \xrightarrow{x=4} \log_4^4 = \log_{4^{\frac{1}{2}}}^2 = 2$$

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \text{ می‌دانیم:}$$

$$3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y} \rightarrow 3^{2x+y} = 3^2 \times 3^{x-y} \rightarrow 3^{2x+y} = 3^{2+x-y}$$

$$\rightarrow 2x + y = 2 + x - y \rightarrow x + 2y = 2 \rightarrow x = 2 - 2y$$

$$\log(x+2y) = 1 + \log y \rightarrow \log(x+2y) = \log 10 + \log y \rightarrow \log(x+2y) = \log 10y$$

$$\rightarrow x + 2y = 10y \rightarrow x = 8y \xrightarrow{x=2-2y} 2 - 2y = 8y \rightarrow 10y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{10} \xrightarrow{x=8y} x = \frac{16}{10} = 1,6$$

۵ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_b^N = x \rightarrow b^x = N, \log_{km}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$$

$$\log_9^x + \log_9^y = 2 \rightarrow \log_9^{xy} = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} xy = 9^2 = 81$$

$$x^2 + y^2 = 16 \rightarrow (x+y)^2 - 2xy = 16 \rightarrow (x+y)^2 - 18 = 16$$

$$\rightarrow (x+y)^2 = 34 \rightarrow x+y = \sqrt{34} \text{ یا } x+y = -\sqrt{34} \text{ (اعدادی مثبت هستند.) غ ق ق}$$

$$\log_9^{x+y} = \log_9^{\sqrt{34}} = \log_{9^{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{34}$$

۶ - گزینه ۴

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\left. \begin{aligned} 2^x \times 8^y = 4 &\Rightarrow 2^x \times 2^{3y} = 2^2 \Rightarrow 2^{x+3y} = 2^2 \Rightarrow x+3y = 2 \\ \log x = \log 2 + \log y &\Rightarrow \log x = \log 2y \Rightarrow x = 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{4}{5}, y = \frac{2}{5}$$

۷ - گزینه ۱

$$\log_{km}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a, \quad \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log \frac{2}{x} + \log(x+1) = 1 \Rightarrow \log \frac{2x+2}{x} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x+2}{x} = 10 \Rightarrow 10x = 2x+2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_{\lambda}^x = \log_{\lambda}^{\frac{1}{x}} = \log_{\frac{1}{\lambda}}^{x-2} = -\frac{2}{3}$$

۸ - گزینه ۲

$$2x + a > 0 \rightarrow 2x > -a \rightarrow x > -\frac{a}{2} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل } x > \frac{1}{2}} a = -1$$

بنابراین تابع به صورت $y = -1 + \log_b^{(2x-1)}$ است از طرفی مقدار تابع در $x = 2$ برابر صفر است.

$$0 = -1 + \log_b^2 \rightarrow \log_b^2 = 1 \rightarrow b = 3 \rightarrow y = -1 + \log_3^{(2x-1)}$$

اکنون کافی است که به جای y مقدار یک را قرار دهیم.

$$1 = -1 + \log_3^{(2x-1)} \rightarrow \log_3^{(2x-1)} = 2 \xrightarrow{\log_b^a = c \rightarrow a = b^c} 2x - 1 = 3^2 \rightarrow 2x - 1 = 9 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$$

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \quad \text{می دانیم:}$$

$$2^x + 2^x = 2^2 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 2^2 = 0 \xrightarrow{2^x = A} A^2 + A - 2^2 = 0 \Rightarrow (A+9)(A-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -9 \Rightarrow 2^x = -9 \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ A = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2 \xrightarrow{x=3} \log 4 + \log(2y+9) = 2$$

$$\Rightarrow \log(4y+36) = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} 4y+36 = 10^2 \Rightarrow 4y = 64 \Rightarrow y = 16$$

۱۰ - گزینه ۳

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad \text{می دانیم:}$$

$$4\sqrt{2} = 4^x \Rightarrow 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 4^x \Rightarrow 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2x} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$1 + \log \sqrt{x+1} = \log y \Rightarrow \log 10 + \log \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \log y$$

$$\Rightarrow \log 10 + \log \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log 10 \times \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow y = 15$$

۱۱ - گزینه ۳

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^{a^n} = n \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log(81)^k \rightarrow \log 3 + \log 3^{\frac{1}{4}} = \log 3^{4k} \rightarrow \log 3 \times 3^{\frac{1}{4}} = \log 3^{4k}$$

$$\rightarrow \log 3^{\frac{5}{4}} = \log 3^{4k} \rightarrow 4k = \frac{5}{4} \rightarrow k = \frac{5}{16}$$

$$\log_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{16}} \stackrel{k=\frac{5}{16}}{=} \log_{\frac{5}{4}}^{16} = \log_{\frac{5}{4}}^{2^4} = 4$$

۱۱ - گزینه ۲

$$\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \quad \log_{km}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5) \rightarrow \log \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \log(2x - 5)$$

$$\rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = 2x-5 \rightarrow x+2=2x-5 \rightarrow x=7$$

$$\log_{\sqrt{x+1}} = \log_{\sqrt{x}} = \log_{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\log_k^{a^n} = n \log_k^a, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad \text{می دانیم:} \quad 13 - \text{گزینه 3}$$

$$2^{x-7} \times 2^{x+y} = 1 \rightarrow 2^{x-7} \times (2^2)^{x+y} = 1 \rightarrow 2^{x-7+2x+2y} = 1 \rightarrow 2^{3x+2y-7} = 1 \rightarrow 3x+2y-7=0$$

$$\log y = 2 \log 3 + \log x \rightarrow \log y = \log 9 + \log x \rightarrow \log y = \log 9x \rightarrow y = 9x$$

$$\text{پس: } \begin{cases} 3x+2y=7 \\ y=9x \end{cases} \rightarrow 3x+18x=7 \rightarrow 21x=7 \rightarrow x=\frac{1}{3}, y=9\left(\frac{1}{3}\right)=3$$

14 - گزینه 3

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_{k^n}^m = \frac{m}{n} \log_k^a, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_x^{3x+8} = 2 - \log_x^{x-6} \rightarrow \log_x^{3x+8} + \log_x^{x-6} = 2$$

$$\rightarrow \log_x^{(3x+8)(x-6)} = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} (3x+8)(x-6) = x^2$$

$$\rightarrow 3x^2 - 18x + 8x - 48 = x^2 \rightarrow 2x^2 - 10x - 48 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 & \text{ق ق} \\ x=-3 & \text{غ ق ق (جلوی لگاریتم را منفی می کند)}$$

$$\log_{\sqrt{x}}^x = \log_{\sqrt{x}}^8 = \log_{\sqrt{x}}^8 = \frac{3}{2}$$

15 - گزینه 4

$$\log_k^{a^n} = n \log_k^a, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad \text{می دانیم:}$$

$$2 \log x = 1 + \log\left(x + \frac{12}{5}\right) \Rightarrow \log x^2 = \log 10 + \log\left(x + \frac{12}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \log x^2 = \log 10\left(x + \frac{12}{5}\right) \Rightarrow x^2 = 10x + 24$$

$$x^2 - 10x - 24 = 0 \Rightarrow (x-12)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=12 & \text{ق ق} \\ x=-2 & \text{غ ق ق (جلوی لگاریتم را منفی می کند)}$$

$$\log_{\delta}^{2x+1} = \log_{\delta}^{25} = \log_{\delta}^{25} = 2$$

16 - گزینه 3

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log(y+2) = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} y+2 = 10^1 \rightarrow y=8$$

$$\log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \xrightarrow{y=8} \log(8-x) + \log(4x+8) = 2$$

$$\rightarrow \log(8-x)(4x+8) = 2 \rightarrow (8-x)(4x+8) = 10^2 \rightarrow 32x + 64 - 4x^2 - 8x = 100$$

$$\rightarrow 4x^2 - 24x + 36 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x=3$$

17 - گزینه 2

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \log_{k^n}^m = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 30 - \log 2 \rightarrow \log(2x-1)(x+3) = \log 15$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 15 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 13}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{ق ق} \\ x=-\frac{18}{4} & \text{غ ق ق (جلوی لگاریتم را منفی می کند)}$$

$$\log_{\lambda} x = \log_{\sqrt{3}}^2 = \frac{1}{3}$$

$$y = \log_{\sqrt{x}}^{x-2} \xrightarrow{\text{دامنه}} x-2 > 0 \rightarrow \boxed{x > 2}$$

$$3^{x^2-2} = 81^x \rightarrow 3^{x^2-2} = 3^{4x} \rightarrow x^2-2=4x \rightarrow x^2-4x=0$$

1 - گزینه 3 می دانیم:

$$\rightarrow (x-2)^2 - 4 = 2 \rightarrow (x-2)^2 = 6 \rightarrow x-2 = \pm\sqrt{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{6} \\ x = 2 - \sqrt{6} < 2 \end{cases}$$

می‌دانیم $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$ است.

$$\log_{\sqrt{e}}^{x-2} \stackrel{x=2+\sqrt{6}}{=} \log_{\sqrt{e}}^{2+\sqrt{6}-2} = \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{6}} = \log_{\sqrt{e}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

۱۹ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\begin{aligned} \log(3x+1) + 2 \log \sqrt{x-2} &= \frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 1) + \log(x+2) \\ \rightarrow \log(3x+1) + 2 \log(x-2) &= \frac{1}{2} \log(x-1)^2 + \log(x+2) \\ \rightarrow \log(3x+1) + \log(x-2) &= \log(x-1) + \log(x+2) \rightarrow \log(3x+1)(x-2) = \log(x-1)(x+2) \\ \rightarrow (3x+1)(x-2) &= (x-1)(x+2) \rightarrow 3x^2 - 6x + x - 2 = x^2 + 2x - x - 2 \\ \rightarrow 2x^2 - 6x &= 0 \rightarrow 2x(x-3) = 0 \end{aligned}$$

(زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را منفی می‌کند) غ ق ق ۰

۲۰ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$, $\log_{km}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log(2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1) + \log |x| = \log 3 \rightarrow \log(2x-1)|x| = \log 3 \Rightarrow (2x-1)|x| = 3$$

با توجه به این که $2x-1 > 0$ است، پس $x > \frac{1}{2}$ و در نتیجه $|x| = x$ می‌باشد، لذا داریم:

$$(2x-1)(x) = 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ غ ق ق} \\ x = -\frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \text{ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین برای یافتن لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ داریم:

$$\log_{\sqrt{e}}^{\frac{x}{3}} = \log_{\sqrt{e}}^{\frac{1}{3}} = \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{-1}} = -\frac{1}{2}$$

۲۱ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$, $\log_b^N = x \rightarrow b^x = N$, $\log_{km}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{e}}(x^2-1) &= 1 + \log_{\sqrt{e}}(x+3) \rightarrow \log_{\sqrt{e}}(x^2-1) - \log_{\sqrt{e}}(x+3) = 1 \\ \rightarrow \log_{\sqrt{e}} \frac{x^2-1}{x+3} &= 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{x^2-1}{x+3} = \sqrt{e} \rightarrow x^2-1 = \sqrt{e}x+3 \rightarrow x^2-\sqrt{e}x-4=0 \\ \rightarrow (x-5)(x+2) &= 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ ق ق} \\ x = -2 \text{ ق ق} \end{cases} \end{aligned}$$

ولی برای محاسبه‌ی $\log_{\sqrt{e}}^{(x-3)}$ جای x فقط می‌توان $x = 5$ را قرار داد.

$$\log_{\sqrt{e}}^{(x-3)} \stackrel{x=5}{=} \log_{\sqrt{e}}^2 = \frac{1}{2}$$

۲۲ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_{km}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{e}}^x &= 1 + \log_{\sqrt{e}}^{y+1} \Rightarrow \log_{\sqrt{e}}^x = \log_{\sqrt{e}}^y + \log_{\sqrt{e}}^{y+1} \Rightarrow \log_{\sqrt{e}}^x = \log_{\sqrt{e}}^{y^2+y} \Rightarrow x = y^2 + y \\ x^2 - y^2 &= 32 \Rightarrow (y^2+y)^2 - y^2 = 32 \Rightarrow (y^2+y+4)(y^2+y-4) - y^2 = 32 \Rightarrow 3y^2 + 8y - 28 = 0 \\ \Rightarrow y &= \frac{-8 \pm \sqrt{64+336}}{6} \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 6 \\ y = -\frac{14}{3} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول است} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\log_{\sqrt{e}}^{x+y} \stackrel{x=6, y=2}{=} \log_{\sqrt{e}}^{6+2} = \log_{\sqrt{e}}^8 = \frac{3}{2}$$

۲۱ - گزینه ۳

$$2^{-x} < 0.000001 \rightarrow 2^{-x} < 10^{-6}$$

از طرفین رابطه‌ی داده شده در مبنای ۱۰، لگاریتم می‌گیریم.

$$\log 2^{-x} < \log 10^{-6} \rightarrow -x \log 2 < -6 \xrightarrow{\text{در منفی ضرب می‌کنیم}} x \log 2 > 6 \rightarrow x \left(\frac{301}{1000} \right) > 6$$

$$\rightarrow x > \frac{6000}{301} \rightarrow x > 19.934$$

پس کوچک‌ترین عدد x با دو رقم اعشار، ۱۹٫۹۴ است.