پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^a = \frac{1}{\log_a^k} \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$\log_2^9 = x \ \Rightarrow \ 2\log_2^3 = x \ \Rightarrow \ \log_2^3 = \frac{x}{2}$$

$$\log_6^2 = \frac{1}{\log_2^6} = \frac{1}{\log_2^2 + \log_2^3} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{x+2}{2}} = \frac{2}{x+2}$$

۲ - گزینه ۱

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\log_4^{(4a+1)} = \log_4^{(4\times\frac{3}{4}+1)} = \log_4^4 = 1$$

۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^2} = \log_{\sqrt{b}}^a + \log_{\sqrt{b}}^{b^2} = \log_{b^{\frac{1}{2}}}^a + \log_{b^{\frac{1}{2}}}^{b^2} = 2\log_b^a + 4 = 2(\frac{3}{2}) + 4 = 7$$

۴ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_9^{\sqrt[4]{27}} = \log_{3^2}^{3\times 27^{\frac{1}{4}}} = \log_{3^2}^{3\times(3^3)^{\frac{1}{4}}} = \log_{3^2}^{3^1\times 3^{\frac{3}{4}}} = \log_{3^2}^{3^{\frac{7}{4}}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{7}{8}$$

۵ - گزینه ۴ **می‌دانیم:** $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

عدد مورد نظر را a در نظر می‌گیریم، طبق فرض داریم:

$$\log_4^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \log_{2^2}^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2^a = \frac{15}{4} \ \Rightarrow \ \log_2^a = \frac{15}{2}$$

$$\log_8^{a^{\frac{1}{2}}} = \log_{2^3}^{a^{-2}} = \frac{-2}{3}\log_2^a = -\frac{2}{3}(\frac{15}{2}) = -5$$

۶ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

دقت کنید که $(1+\sqrt{2})^2 = 1+2+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$ **است.**

$$\log_{(1+\sqrt{2})}^{(3+2\sqrt{2})^3} = \log_{(1+\sqrt{2})}^{((1+\sqrt{2})^2)^3} = \log_{(1+\sqrt{2})}^{(1+\sqrt{2})^6} = 6$$

۷ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_b^N = x \to b^x = N}$

$$\log_2^{12} = \alpha \xrightarrow{\text{تعریف}} 2^\alpha = 12$$

$$4^{\alpha-2} = 4^\alpha \times 4^{-2} = (2^2)^\alpha \times \frac{1}{16} = (2^\alpha)^2 \times \frac{1}{16} = \frac{144}{16} = 9$$

۸ - گزینه ۴ **می دانیم:** $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ a^{\log_b^x} = x^{\log_b^a}}$

حاصل هر لگاریتم را جداگانه بدست آورده و سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\log_{0/2}^{625}=\log_{\frac{2}{10}}^{5^4}=\log_{\frac{1}{5}}^{5^4}=\log_{5^{-1}}^{5^4}=-4\\ 9^{\log_3^{\sqrt{5}}}=\sqrt{5}^{\log_3^9}=\sqrt{5}^{\log_3^{3^2}}=(\sqrt{5})^2=5\end{array}\right\}\to -4+5=1$$

۹ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{\frac{a}{b}}=\log_k^a-\log_k^b\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\log\frac{8100}{\sqrt[4]{49}}=\log 8100-\log\sqrt[4]{49}=\log(81\times 100)-\log 49^{\frac{1}{4}}=\log 81+\log 100-\log(7^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$=\log 3^4+\log 10^2-\log 7^{\frac{1}{2}}=4\log 3+2-\frac{1}{2}\log 7=(4\times 0/4)+2-\frac{1}{2}(0/8)=3/2$$

۱۰ - گزینه ۲

می‌دانیم $\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}$ و $\log 5=1-\log 2$ است.

$$\log 6=\log(2\times 3)=\log 2+\log 3\to\log 3=\log 6-\log 2=0/78-0/3=0/48$$

پس: $\log 15=\log 5+\log 3=1-\log 2+\log 3=0/7+0/48=1/18$

۱۱ - گزینه ۳

$$3\sqrt{3}=9^{2k}\to 3\times 3^{\frac{1}{2}}=(3^2)^{2k}\to 3^{\frac{3}{2}}=3^{4k}\to 4k=\frac{3}{2}\to k=\frac{3}{8}$$

$$\log_6^{8k+3}=\log_6^{8(\frac{3}{8})+3}=\log_6^6=1$$

۱۲ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$a=\log_{12}^2+\log_{12}^{(3\times 4)}=\log_{12}^2+1\Rightarrow\log_{12}^2=a-1$$

$$\log_{12}^3+\log_{12}^6+\log_{12}^{16}=\log_{12}(3\times 6\times 16)=\log_{12}^{(144\times 2)}=\log_{12}^{12^2}+\log_{12}^2=2+\log_{12}^2=2+(a-1)=a+1$$

۱۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a\ ,\ a^{\log_b^x}=x^{\log_b^a}}$

$$\left.\begin{array}{l}\log_9^{27}=\log_{3^2}^{3^3}=\frac{3}{2}\\ 10^{\log\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}^{\log 10}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\to\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

۱۴ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a\ ,\ \log_k^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^k}\ ,\ \log_k^a=\frac{1}{\log_a^k}}$

$$\log_{\sqrt[4]{3}}^4=a\Rightarrow\log_{3^{\frac{1}{2}}}^{2^2}=a\Rightarrow 4\log_3^2=a\Rightarrow\log_3^2=\frac{a}{4}\Rightarrow\log_2^3=\frac{4}{a}$$

$$\log_{\sqrt[2]{3}}^{\sqrt[3]{2}}=\log_{\sqrt{12}}^{\sqrt{18}}=\log_{12^{\frac{1}{2}}}^{18^{\frac{1}{2}}}=\log_{12}^{18}=\frac{\log_2^{9\times 2}}{\log_2^{4\times 3}}=\frac{\log_2^9+\log_2^2}{\log_2^4+\log_2^3}=\frac{2\log_2^3+1}{2+\log_2^3}=\frac{\frac{8}{a}+1}{2+\frac{4}{a}}=\frac{8+a}{2a+4}$$

۱۵ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a\ ,\ \log_k^{\frac{a}{b}}=\log_k^a-\log_k^b\ ,\ \log 5=1-\log 2}$

$$\log\sqrt[3]{1/6}=\log(1/6)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log 1/6=\frac{1}{3}\log\frac{16}{10}$$

$$=\frac{1}{3}(\log 16-\log 10)=\frac{1}{3}(4\log 2-1)=\frac{1}{3}(4(1-\log 5)-1)=\frac{1}{3}(3-4\log 5)$$

$$=\frac{1}{3}(3-12k)=\frac{1}{3}(3(1-4k))=1-4k$$

۱۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log(۶-۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱+\sqrt{۵}) = \log(۶-۲\sqrt{۵}) + \log(۱+\sqrt{۵})^۲ = \log(۶-۲\sqrt{۵}) + \log(۱+۵+۲\sqrt{۵})$$

$$= \log(۶-۲\sqrt{۵}) + \log(۶+۲\sqrt{۵}) = \log\underbrace{(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})}_{\text{مزدوج}} = \log(۳۶-۲۰) = \log ۱۶ = \log^{۲^۴} = ۴\log ۲ = ۴k$$

۱۷ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_b^N = x \to b^x = N \ , \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log_{\sqrt{۳}}^a = \frac{۴}{۳} \Rightarrow a = (\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow a = (۳^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۴}{۳}} = ۳^{\frac{۴}{۶}} = ۳^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\log_۸^{(a^۳+۷)} = \log_۸^{(۳^{\frac{۲}{۳}})^۳+۷} = \log_۸^{۳^۲+۷} = \log_۸^{۱۶} = \log_{۲^۳}^{۲^۴} = \frac{۴}{۳}$$

۱۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\ \log_k^a \ , \ \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}}$

کافی است دو نقطه‌ی داده شده را در تابع صدق دهیم $\left(f(x) = a + ۲\log_۲^{۳x+b}\right)$

$$\left|\begin{matrix} ۵ \\ ۱۱ \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۱ = a + ۲\log_۲^{۱۵+b} \ , \ \left|\begin{matrix} ۲۱ \\ ۱۵ \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۵ = a + ۲\log_۲^{۶۳+b}$$

$$-\begin{cases} ۱۱ = a + ۲\log_۲^{۱۵+b} \\ ۱۵ = a + ۲\log_۲^{۶۳+b} \end{cases} \to ۴ = ۲\log_۲^{۶۳+b} - ۲\log_۲^{۱۵+b} \to ۲ = \log_۲^{۶۳+b} - \log_۲^{۱۵+b}$$

$$\to \log_۲^{\frac{۶۳+b}{۱۵+b}} = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۶۳+b}{۱۵+b} = ۲^۲ \to ۶۳+b = ۶۰+۴b \to ۳b = ۳ \to b = ۱$$

$$\xrightarrow{۱۱=a+۲\log_۲^{۱۵+b}} ۱۱ = a + ۲\log_۲^{۱۶} \to ۱۱ = a + ۲\log_۲^{۲^۴} \to ۱۱ = a + ۸ \to a = ۳$$

۱۹ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}}$

کافی است دو نقطه‌ی داده شده را در تابع صدق دهیم.

$$\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۶ \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۶ = a + \log_۲^{۲b-۴} \quad , \quad \left|\begin{matrix} ۱۲ \\ ۱۰ \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۰ = a + \log_۲^{۱۲b-۴}$$

$$-\begin{cases} a + \log_۲^{۲b-۴} = ۶ \\ a + \log_۲^{۱۲b-۴} = ۱۰ \end{cases} \to \log_۲^{۱۲b-۴} - \log_۲^{۲b-۴} = ۴ \to \log_۲^{\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}} = ۴ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۱۲b-۴}{۲b-۴} = ۲^۴ = ۱۶$$

$$\to ۱۲b - ۴ = ۳۲b - ۶۴ \to ۲۰b = ۶۰ \to b = ۳ \xrightarrow{a+\log_۲^{۲b-۴}=۶} a + \log_۲^۲ = ۶ \to a + ۱ = ۶ \to a = ۵$$

۲۰ - گزینه ۱

می‌دانیم $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$ و $\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$ و $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$ است.

$$(\frac{۱}{۲})^{\log_۴^{۲۵}+۲} = (\frac{۱}{۲})^{\log_{۲^۲}^{۵^۲}+۲} = (\frac{۱}{۲})^{\log_۲^۵+۲} = (\frac{۱}{۲})^{\log_۲^۵+\log_۲^۴}$$

$$= (\frac{۱}{۲})^{\log_۲^{۲۰}} = ۲۰^{\log_۲^{\frac{۱}{۲}}} = ۲۰^{\log_۲^{۲^{-۱}}} = ۲۰^{-۱} = \frac{۱}{۲۰} = ۰/۰۵$$

۲۱ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log ۵ = ۱ - \log ۲}$

$$A = \frac{۱}{۲}\log(۷+۲\sqrt{۶}) + \log(\sqrt{۶}-۱) = \frac{۱}{۲}\log(\sqrt{۶}+۱)^۲ + \log(\sqrt{۶}-۱)$$

$$= \log(\sqrt{۶}+۱) + \log(\sqrt{۶}-۱) = \log\underbrace{(\sqrt{۶}+۱)(\sqrt{۶}-۱)}_{\text{مزدوج}} = \log(۶-۱) = \log ۵ = ۱ - \log ۲ = ۱ - k$$

دقت کنید: $(\sqrt{۶}+۱)^۲ = ۶ + ۱ + ۲\sqrt{۶} = ۷ + ۲\sqrt{۶}$

۲۱ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\sqrt[5]{A^2-B^2}=\sqrt[5]{(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt[5]{(2+1-2\sqrt{2})-(2+1+2\sqrt{2})}$$

$$=\sqrt[5]{-4\sqrt{2}}=-\sqrt[5]{2^2\times 2^{\frac{1}{2}}}=-\sqrt[5]{2^{\frac{5}{2}}}=-(2^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}}=-2^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{2}$$

$$\log_2(-\sqrt[5]{A^2-B^2})=\log_2^{\sqrt{2}}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

۲۳ ـ گزینه ۱

$$(0/4)^{2x-1}=(\frac{125}{8})^{x^2}\to(\frac{4}{10})^{2x-1}=(\frac{5}{2})^{3x^2}\to(\frac{2}{5})^{2x-1}=(\frac{2}{5})^{-3x^2}$$

$$\to 2x-1=-3x^2\to 3x^2+2x-1=0\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-1\\ x=-\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\end{cases}$$

در عبارت خواسته‌شده نمی‌توانیم به‌جای x عدد -1 را قرار دهیم چون جلوی لگاریتم منفی می‌شود و می‌دانیم که $\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a$ است.

$$\log_8^{9x+1}\xlongequal{x=\frac{1}{3}}\log_8^4=\log_{2^3}^{2^2}=\frac{2}{3}$$

۲۴ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}}$

$$\log_6^2\times\log_6^{18}+(\log_6^3)^2=\log_6^{\frac{6}{3}}\times\log_6^{6\times 3}+(\log_6^3)^2$$

$$=(\log_6^6-\log_6^3)(\log_6^6+\log_6^3)+(\log_6^3)^2$$

$$=\underbrace{(1-\log_6^3)(1+\log_6^3)}_{\text{مزدوج}}+(\log_6^3)^2=1-(\log_6^3)^2+(\log_6^3)^2=1$$

۲۵ ـ گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$2^{x-1}+2^{x+2}=\frac{9}{8}\to 2^x\times 2^{-1}+2^x\times 2^2=\frac{9}{8}\to 2^x(2^{-1}+2^2)=\frac{9}{8}$$

$$\to 2^x(\frac{1}{2}+4)=\frac{9}{8}\to 2^x(\frac{9}{2})=\frac{9}{8}\to 2^x=\frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{2}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=2^{-2}\to x=-2$$

$$\log_3^{|x^3-1|}=\log_3^{|-8-1|}=\log_3^{|-9|}=\log_3^9=\log_3^{3^2}=2$$

۲۶ ـ گزینه ۴

می‌دانیم $\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}$ و $\log_k^a=\frac{1}{\log_a^k}$ است.

$$\log_6^{18}=\log_6^{(3\times 6)}=\log_6^3+\log_6^6=\log_6^3+1=\frac{1}{\log_3^6}+1$$

$$=\frac{1}{\log_3^{3\times 2}}+1=\frac{1}{\log_3^3+\log_3^2}+1=\frac{1}{1+\log_3^2}+1=\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+1$$

$$=\frac{1}{\frac{a+1}{a}}+1=\frac{a}{a+1}+1=\frac{2a+1}{a+1}$$

۲۱ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_b^a=c\to a=b^c}$

با توجه به شکل وقتی که $x\to+\infty$ منحنی به خط $y=-4$ نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty}(3^{a-x}+b)=\underbrace{3^{-\infty}}_{0}+b=b=-4\to y=3^{a-x}-4$$

نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right.$ روی تابع قرار دارد بنابراین در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}5=3^a-4\to 3^a=9\to a=2\to y=3^{2-x}-4$$

برای پیدا کردن x_0 کافی است در تابع به جای y، صفر قرار دهید.

$$0=3^{2-x_0}-4\to 3^{2-x_0}=4\to \log_3^4=2-x_0\to x_0=2-\log_3^4$$

۲۸ - گزینه ۳ می‌دانیم $\log_k^{a^n}=n\log_k^a$ و $\log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}$ و $\log_b^a=c\to a=b^c$ است.

$$\left.\begin{matrix}\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}0=a+\log_2^{b+6}\\ \left|\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}1=a+\log_2^{5b+6}\end{matrix}\right\}-\longrightarrow\log_2^{5b+6}-\log_2^{b+6}=1$$

$$\longrightarrow\log_2^{\frac{5b+6}{b+6}}=1\longrightarrow\frac{5b+6}{b+6}=2\longrightarrow 5b+6=2b+12\longrightarrow 3b=6\longrightarrow b=2$$

$$\xrightarrow{0=a+\log_2^{b+6}}0=a+\log_2^8\longrightarrow 0=a+3\longrightarrow a=-3$$

پس : $f(x)=-3+\log_2^{2x+6}\longrightarrow f(-1)=-3+\log_2^4=-3+2=-1$

۲۹ - گزینه ۱ می‌دانیم که $\log_b^a=c\to a=b^c$ و $\log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}$ است.

$$2^b=0/4\to b=\log_2^{0/4}=\log_2^{\frac{4}{10}}=\log_2^{\frac{2}{5}}=\log_2^2-\log_2^5\to b=1-a\to a+b=1$$

پس: $\log_5^{a+b}=\log_5^1=0$

۳۰ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\log_b^a=c\to a=b^c\ ,\ \log_b^a\times\log_c^b=\log_c^a\ \ ,\ \ \log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a}$

$$3^a=5\to\log_3^5=a\ ,\ 5^b=9\sqrt{3}\to\log_5^{9\sqrt{3}}=b$$

$$ab=\log_3^5\times\log_5^{9\sqrt{3}}=\log_3^{9\sqrt{3}}=\log_3^{3^2\times3^{\frac{1}{2}}}=\log_3^{3^{\frac{5}{2}}}=\frac{5}{2}$$

پس : $\log_4^{ab-2}=\log_4^{\frac{5}{2}-2}=\log_4^{\frac{1}{2}}=\log_{2^2}^{2^{-1}}=-\frac{1}{2}$

۳۱ - گزینه ۳ می‌دانیم که $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ و $\log_k^{a^n}=n\log_k^a$ و $\log_k^{ab}=\log_k^a+\log_k^b$ و $\log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}$ است.

$$\log_2^3=k\to\frac{\log 3}{\log 2}=k\to\log 3=k\log 2$$

پس: $\frac{\log 12+\log 2}{\log 12-\log 2}=\frac{\log 24}{\log 6}=\frac{\log 3+\log 8}{\log 3+\log 2}=\frac{k\log 2+3\log 2}{k\log 2+\log 2}=\frac{(k+3)\log 2}{(k+1)\log 2}=\frac{k+3}{k+1}$

۳۲ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}^{\sqrt[6]{8\sqrt{32}}}=\log_{\sqrt[3]{2^2\times2^{\frac{1}{2}}}}^{\sqrt[6]{2^3\sqrt{2^5}}}=\log_{\sqrt[3]{2^{\frac{5}{2}}}}^{\sqrt[6]{2^3\times2^{\frac{5}{2}}}}=\log_{2^{\frac{5}{6}}}^{\sqrt[6]{2^{\frac{11}{2}}}}=\log_{2^{\frac{11}{6}}}^{(2^{\frac{11}{2}})^{\frac{1}{6}}}=\log_{2^{\frac{11}{6}}}^{2^{\frac{11}{12}}}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{11}{6}}=\frac{1}{2}$$

۳۳ - گزینه ۴ می‌دانیم $\log_b^a=c\to a=b^c$ و $f(a)=b\to f^{-1}(b)=a$ و $\log_k^{a^n}=n\log_k^a$ است.

بتدا نقطهٔ $(5,2)$ را در تابع صدق می‌دهیم:

$$\log_a^{5a-6}=2\Rightarrow a^2=5a-6\Rightarrow a^2-5a+6=0$$

$$(a-2)(a-3)=0\Rightarrow\begin{cases}a=2\\a=3\end{cases}$$

گر $a=2$ باشد، ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\log_2^{(2x-6)}$ است که نقطهٔ $(7,3)$ هم در آن صدق می‌کند. ولی برای $a=3$ این‌گونه نیست. حال داریم:

$$f^{-1}(x)=4\Rightarrow x=f(4)=\log_2^{(2\times4-6)}=\log_2^2=1$$

۳۴ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_b^N = x \xrightarrow{\text{تعریف}} b^x = N \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{۲}^{x} = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} x = ۲^{۲} \ , \ \log_{\sqrt{۲}}^{y} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{تعریف}} y = (\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۲}} = (۲^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{\frac{۱}{۴}}$$

$$\log_{xy}^{۲\sqrt{۲}} = \log_{۲^{۲}\times ۲^{\frac{۱}{۴}}}^{۲\times ۲^{\frac{۱}{۲}}} = \log_{۲^{\frac{۹}{۴}}}^{۲^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۹}{۴}} = \frac{۱۲}{۱۸} = \frac{۲}{۳}$$

۳۵ - گزینه ۳ می‌دانیم $\log_k^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^k}$ و $\log_k^{a^n} = n\log_k^a$ و $\log ۵ = ۱ - \log ۲$ است.

$$\log_{۶}^{۲۵} = \frac{\log ۲۵}{\log ۶} = \frac{۲\log ۵}{\log ۳ + \log ۲} = \frac{۲(۱-\log ۲)}{\log ۳ + \log ۲} = \frac{۲(۱-a)}{a+b} = \frac{۲-۲a}{a+b}$$

۳۶ - گزینه ۱ می‌دانیم که $\log_{k^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_k^a$ است.

$$۵\sqrt[۳]{۰/۲} = ۵\sqrt[۳]{\frac{۱}{۵}} = ۵ \times \sqrt[۳]{۵^{-۱}} = ۵ \times ۵^{-\frac{۱}{۳}} = ۵^{\frac{۲}{۳}}$$

$$A = \log_{۲۵}^{۵^{\frac{۲}{۳}}} = \log_{۵^{۲}}^{۵^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{\frac{۲}{۳}}{۲} = \frac{۱}{۳}$$

پس : $\log_{۵}^{\frac{۱}{A}+۲} = \log_{۵}^{\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}+۲} = \log_{۵}^{۳+۲} = \log_{۵}^{۵} = ۱$

۳۷ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

ابتدا عبارت A را خلاصه می‌کنیم.

$$A = \frac{\left(۲^{۲}\right)^{\frac{۳}{۴}}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} + \left(۳^{۲}\right)^{\frac{۱}{۴}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} + \sqrt{۳}$$

$$= \frac{۲\sqrt{۲}\left(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right)}{\left(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\right)\left(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right)} + \sqrt{۳} = \frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}}{\left(۱+\sqrt{۲}\right)^{۲} - \left(\sqrt{۳}\right)^{۲}} + \sqrt{۳}$$

$$= \frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}}{۱+۲\sqrt{۲}+۲-۳} + \sqrt{۳} = \frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}} + \sqrt{۳} = \frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}+۲\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{۲\left(\sqrt{۲}+۲\right)}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}+۲}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} + \frac{۲}{\sqrt{۲}} = ۱ + \sqrt{۲}$$

توجه کنید که $\sqrt{۲} - ۱ = \frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}$ است.

$$\log_{A}^{\sqrt{۲}-۱} = \log_{۱+\sqrt{۲}}^{\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}} = \log_{۱+\sqrt{۲}}^{\left(\sqrt{۲}+۱\right)^{-۱}} = -۱$$

۳۸ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

این تابع محور طول را در $\left|\begin{matrix} -۱۰/۱ \\ ۰ \end{matrix}\right.$ قطع می‌کند پس در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix} -۱۰/۱ \\ ۰ \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۰ = \log(-۱۰/۱a+b) \xrightarrow{\log ۱=۰} -۱۰/۱a+b = ۱$$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف این تابع کافی است جلوی لگاریتم را بزرگتر از صفر قرار دهید.

$$ax+b>۰ \to ax>-b \to \begin{cases} a>۰ \to x>\frac{-b}{a} \\ a<۰ \to x<\frac{-b}{a} \end{cases}$$

چون دامنه‌ی تعریف این تابع $x<-۱۰$ است. پس: $-\frac{b}{a} = -۱۰ \to ۱۰a = b$

$$\begin{cases} -۱۰/۱a+b=۱ \\ b=۱۰a \end{cases} \to a=-۱۰ \ , \ b=-۱۰۰$$

پس: $\log\sqrt{ab} = \log\sqrt{۱۰۰۰} = \log\sqrt{۱۰^{۳}} = \log ۱۰^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲}$

۳۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ a^{\log_k^b} = b^{\log_k^a}}$

$$\left(\frac{\sqrt{۲}}{۴}\right)^{-۲+\log_{۰/۵}^{۹}} = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۴}\right)^{-۲} \times \left(\frac{\sqrt{۲}}{۴}\right)^{\log_{۰/۵}^{۹}} = \left(\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{۲}}\right)^{-۲} \times ۹^{\log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}} = \left(۲^{-\frac{۳}{۲}}\right)^{-۲} \times ۹^{\log_{۲^{-۱}}^{\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{۲}}}}$$

$$= ۲^{۳} \times ۹^{\log_{۲^{-۱}}^{۲^{-\frac{۳}{۲}}}} = ۲^{۳} \times ۹^{\frac{۳}{۲}} = ۸ \times (۳^{۲})^{\frac{۳}{۲}} = ۸ \times ۳^{۳} = ۸ \times ۲۷ = ۲۱۶$$

۴۰ - گزینه ۴ می‌دانیم که $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$ **و** $\log_k^{a^n} = n\log_k^a$ **است.**

$$\log_{۳۹}^{۱۱۷} = \log_{۳۹}^{۹\times۱۳} = \log_{۳۹}^{۹} + \log_{۳۹}^{۱۳} = \log_{۳۹}^{۳^{۲}} + \log_{۳۹}^{۱۳} = ۲\log_{۳۹}^{۳} + \log_{۳۹}^{۱۳}$$

پس : $\left(\log_{۳۹}^{۳}\right)^{۲} + \log_{۳۹}^{۱۳} \times \log_{۳۹}^{۱۱۷} = \left(\log_{۳۹}^{۳}\right)^{۲} + \log_{۳۹}^{۱۳}\left(۲\log_{۳۹}^{۳} + \log_{۳۹}^{۱۳}\right)$

$$= \left(\log_{۳۹}^{۳}\right)^{۲} + ۲\log_{۳۹}^{۱۳} \times \log_{۳۹}^{۳} + \left(\log_{۳۹}^{۱۳}\right)^{۲}$$

$$= \left(\log_{۳۹}^{۳} + \log_{۳۹}^{۱۳}\right)^{۲} = \left(\log_{۳۹}^{۳\times۱۳}\right)^{۲} = \left(\log_{۳۹}^{۳۹}\right)^{۲} = ۱^{۲} = ۱$$