پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{۹}^{(\frac{۱}{۵۰۰})^۲} = \log_{۳^۲}^{(\frac{۱}{۵۰۰})^۲} = A \Rightarrow \log_{۳}^{\frac{۱}{۵۰۰}} = A$$

$$\underbrace{۳^۵}_{۲۴۳} < ۵۰۰ < \underbrace{۳^۶}_{۷۲۹} \to \frac{۱}{۳^۶} < \frac{۱}{۵۰۰} < \frac{۱}{۳^۵} \Rightarrow ۳^{-۶} < \frac{۱}{۵۰۰} < ۳^{-۵}$$

$$\Rightarrow \log_{۳}^{۳^{-۶}} < \log_{۳}^{\frac{۱}{۵۰۰}} < \log_{۳}^{۳^{-۵}} \to -۶ < \log_{۳}^{\frac{۱}{۵۰۰}} < -۵$$

۲ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log ۹ = ۰/۹۵۴۲۴ \Rightarrow ۲\log ۳ = ۰/۹۵۴۲۴ \Rightarrow \log ۳ = ۰/۴۷۷۱۲$$

$$\log ۳^{۱۰۰} = ۱۰۰\log ۳ = ۱۰۰(۰/۴۷۷۱۲) = ۴۷/۷۱۲$$

تعداد ارقام $= [۴۷/۷۱۲] + ۱ = ۴۷ + ۱ = ۴۸$

اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه تعداد ارقام n برابر است با $[\log n] + ۱$.

۳ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log ۲^{۱۰۰} = ۱۰۰\log ۲ = ۱۰۰(۰/۳۰۱) = ۳۰/۱$$

تعداد ارقام $= [۳۰/۱] + ۱ = ۳۰ + ۱ = ۳۱$

اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه تعداد ارقام n برابر است با $[\log n] + ۱$.

۴ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}}$

$$\log_{۲}^{۲+\sqrt{۳}} - \log_{۲}^{۲-\sqrt{۳}} = \log_{۲}^{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}} \overset{\text{گویا می‌کنیم}}{=\!=\!=} \log_{۲}^{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}} = \log_{۲}^{\frac{(۲+\sqrt{۳})^۲}{۴-۳}} = \log_{۲}^{\frac{۴+۳+۴\sqrt{۳}}{۱}} = \log_{۲}^{۷+۴\overbrace{\sqrt{۳}}^{۱/۷}} = \log_{۲}^{۱۳/۸}$$

$$۲^۳ < ۱۳/۸ < ۲^۴ \to \log_{۲}^{۲^۳} < \log_{۲}^{۱۳/۸} < \log_{۲}^{۲^۴} \to ۳ < \log_{۲}^{۱۳/۸} < ۴ \to [\log_{۲}^{۱۳/۸}] = ۳$$