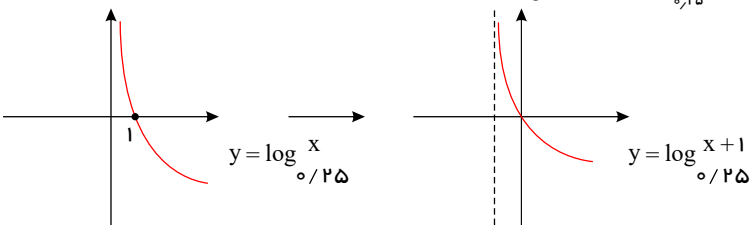
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ از انتقال نمودار $y=\log_{۰/۲۵}^{x}$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ محور xها، نمودار $y=\log_{۰/۲۵}^{x+۱}$ حاصل می‌شود.



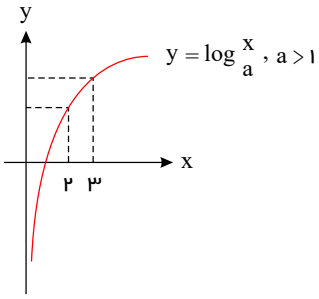
۲ - گزینه ۳ چون مبنای لگاریتم داده‌شده بزرگ‌تر از یک است بنابراین تابع صعودی است. پس گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند. ازطرفی نقطهٔ برخورد تابع با محور xها از معادلهٔ $y=۰$ به‌دست می‌آید.

$$y=۰ \to \log_{۰/۱} x=۰ \xrightarrow{\log ۱=۰} ۰/۱x=۱ \to x=۱۰$$

بنابراین گزینهٔ سوم صحیح است.

۳ - گزینه ۱

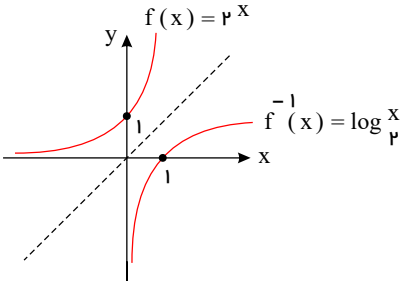
نمودار تابع $y=\log_a^x$ را با شرط $a>۱$ رسم می کنیم (واضح است هرچه x افزایش می یابد y افزایش می یابد)



۴ - گزینه ۳ دامنه‌ی تابع رادیکالی $y=\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ برابر است با:

$$x-f^{-۱}(x)\geq ۰ \Rightarrow x\geq f^{-۱}(x)$$

ابتدا معکوس تابع $f(x)=۲^x$ را رسم می‌کنیم. باتوجه به نامعادله‌ی $x\geq f^{-۱}(x)$ ، به دنبال محدوده‌ی xهایی هستیم که به ازای آن، نمودار خط $y=x$ بالاتر یا روی نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ باشد. باتوجه به شکل در تمام نقاط دامنه‌ی $f^{-۱}(x)$ ، خط $y=x$ بالاتر از نمودار معکوس f قرار دارد. پس دامنه‌ی تابع مورد نظر $(۰,+\infty)$ می‌شود.



$$D_{f^{-۱}}=(۰,+\infty)$$

۵ - گزینه ۲ ابتدا باید ضابطه‌ی تابع معکوس را پیدا کنیم برای این منظور x را برحسب y به دست می‌آوریم و سپس yها را به x و x را به $f^{-۱}(x)$ تبدیل می‌کنیم.

$$y=\log_۳^{x-۱} \xrightarrow{\text{تعریف}} x-۱=۳^y \to x=۳^y+۱ \to f^{-۱}(x)=۳^x+۱$$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{۴-f^{-۱}(x)}$ کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

$$۴-f^{-۱}(x)\geq ۰ \to ۴-(۳^x+۱)\geq ۰ \to ۴-۳^x-۱\geq ۰ \to ۳^x\leq ۳^۱ \to x\leq ۱$$

که این جواب شامل یک عدد طبیعی می‌باشد. $(x=۱)$

توجه: در بازهٔ $x\leq ۱$ این x مربوط به دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ است و ربطی به دامنهٔ تابع لگاریتمی ندارد.

۶ - گزینه ۳

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد $\Rightarrow ۲x-۳>۰ \Rightarrow x>\frac{۳}{۲}$

زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد $\Rightarrow \log(2x-3)\geq 0 \Rightarrow \log(2x-3)\geq \log 1 \Rightarrow 2x-3\geq 1 \Rightarrow 2x\geq 4 \Rightarrow x\geq 2$

از اشتراک این دو جواب به $x\geq 2$ یا $x\in[2,+\infty)$ می‌رسیم.

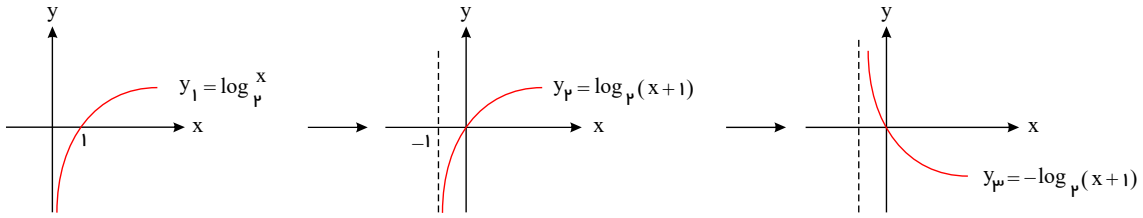
۷ - گزینه ۴ جلوی لگاریتم باید مثبت باشد یعنی: $x+a>0 \to x>-a \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار } x>1} a=-1$

$$f(x)=2\log_b^{x-1} \xrightarrow{A\left|\begin{matrix}\frac{4}{3}\\ 2\end{matrix}\right.} 2=2\log_b^{\frac{4}{3}-1} \to \log_b^{\frac{1}{3}}=1 \to b=\frac{1}{3}$$

بنابراین $ab=-\frac{1}{3}$ است.

۸ - گزینه ۲ روش اول:

نمودار تابع داده‌شده $y=\log_2^x$ است که یک واحد به سمت چپ برده شده و سپس نسبت به محور xها قرینه شده است.



پس : $y=-\log_2^{(x+1)} \to y=\log_2^{(x+1)^{-1}} \to U(x)=(x+1)^{-1}$

روش دوم:

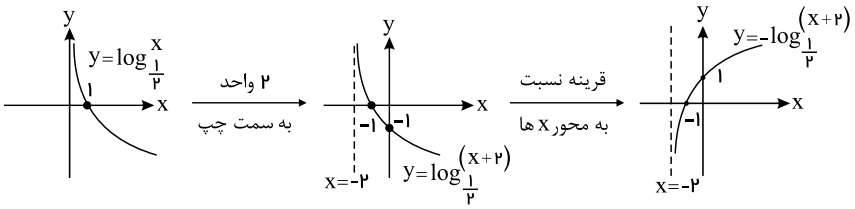
با توجه به شکل، دامنهٔ تابع داده‌شده $x>-1$ است بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند. با توجه به شکل وقتی $x\to(-1)^+$ نمودار تابع به سمت $+\infty$ می‌رود.

گزینهٔ اول : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\log_2(x+1)=\log_2 0^+=-\infty$: نادرست

گزینهٔ دوم : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\log_2\frac{1}{x+1}=\log_2\frac{1}{0^+}=\log_2(+\infty)=+\infty$: درست

توجه کنید اگر $a>1$ باشد $\log_a^{0^+}=-\infty$ و $\log_a^{+\infty}=+\infty$ است.

۹ - گزینه ۴ برای رسم نمودار $y=-\log_{\frac{1}{2}}^{(x+2)}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.



۱۰ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_a^A\geq m \xrightarrow{0<\alpha<1} A\leq a^m}$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{x+1}>0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\ \hline \frac{x-1}{x+1}>0 & & + & \text{ن} & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow x>1 \quad \text{یا} \quad x<-1 \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>1 \\ \log_{0/4}^{\frac{x-1}{x+1}}\geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}\leq 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}-1\leq 0 \Rightarrow \frac{-2}{x+1}\leq 0 \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1\end{cases}$$

۱۱ - گزینه ۲

$$\left.\begin{matrix} y=\log_2^{(x-a)}+b \to x-a>0 \to x>a \\ D_f=(1,+\infty)\to x>1\end{matrix}\right\} \to a=1$$

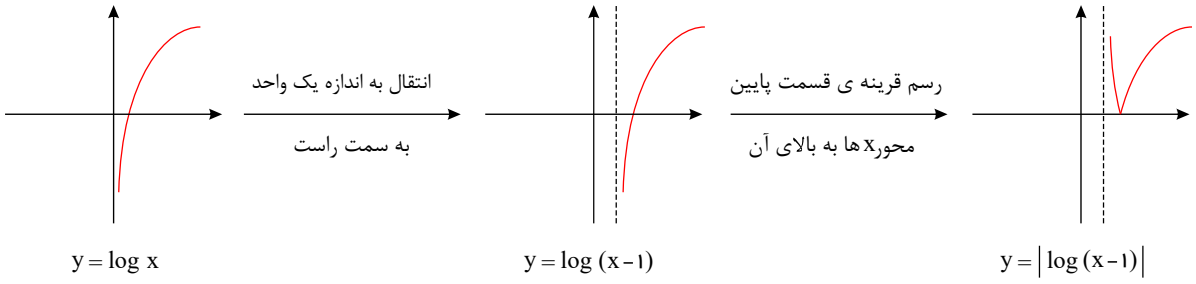
$$y(2)=0 \longrightarrow \log_2^{2-a}+b=0 \longrightarrow \log_2^1+b=0 \longrightarrow 0+b=0 \longrightarrow b=0 \longrightarrow a+b=1$$

۱۲ - گزینه ۲ عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت و مخرج کسر مخالف صفر باشد:

$$\begin{cases}16-x^2>0 \Rightarrow -4<x<4 \\ x+1>0 \Rightarrow x>-1 \\ \log(x+1)\neq 0 \Rightarrow x+1\neq 1 \Rightarrow x\neq 0\end{cases} \Rightarrow D_f=(-1,4)-\{0\}$$

بنابراین دامنهٔ تابع موردنظر شامل اعداد صحیح $\{1,2,3\}$ است.

۱۳ - گزینه ۲



۱۴ - گزینه ۴

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد و مبنای لگاریتم باید مثبت باشد و مخالف یک باشد.

$$\left.\begin{array}{l} x^{۲}-۱>۰ \to x^{۲}>۱ \to x>۱ \text{ یا } x<-۱ \\ ۴۹-x^{۲}>۰ \to x^{۲}<۴۹ \to -۷<x<۷ \\ ۴۹-x^{۲}\neq ۱ \to x^{۲}\neq ۴۸ \to x\neq \pm ۴\sqrt{۳} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(-۷,-۱)\cup(۱,۷)-\{\pm ۴\sqrt{۳}\}$$

دامنه‌ی تعریف تابع شامل اعداد طبیعی ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ می‌باشد.

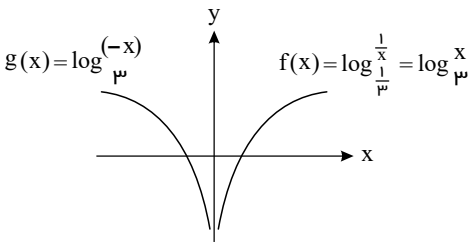
۱۵ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_a^A \geq m \xrightarrow{a>۱} A \geq a^m}$

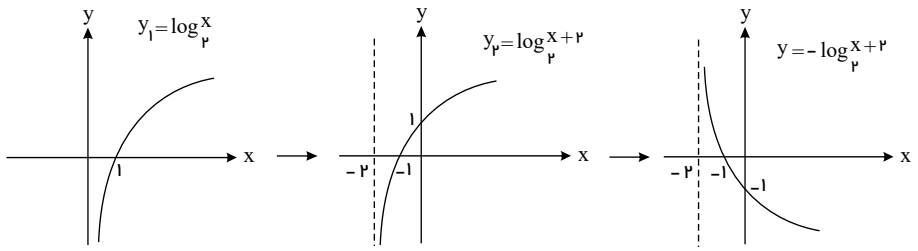
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-۱}{x+۱}>۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -۱ & & ۱ & & +\infty \\ \hline \frac{x-۱}{x+۱}>۰ & & + & ن & - & ۰ & + & \end{array} \Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱ \\ \log_۳^{\frac{x-۱}{x+۱}} \geq ۰ \Rightarrow \dfrac{x-۱}{x+۱} \geq ۱ \Rightarrow \dfrac{x-۱}{x+۱}-۱ \geq ۰ \Rightarrow \dfrac{-۲}{x+۱} \geq ۰ \Rightarrow x+۱<۰ \Rightarrow x<-۱ \end{array}\right. \xrightarrow{\text{اشتراک}} x<-۱$$

۱۶ - گزینه ۲ می‌دانیم که $\log_{k^n}^{a^m} = \dfrac{m}{n}\log_k^a$ **است.**

دامنهٔ $f(x)=\log_{\frac{۱}{۳}}^{\frac{۱}{x}}$ **بازهٔ** $(۰,+\infty)$ **و دامنهٔ تابع** $g(x)=\log_۳^{(-x)}$ **بازهٔ** $(-\infty,۰)$ **است؛ پس هیچ دامنهٔ مشترکی ندارند و اساساً هیچ‌کدام بالای دیگری نیست. این دو منحنی نسبت به محور** y **ها قرینهٔ هم هستند.**



۱۷ - گزینه ۴ نمودار تابع $y=-\log_۲^{(x+۲)}$ **را رسم می‌کنیم و داریم:**



با توجه به شکل گزینهٔ «۴» دست است.