

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$\left(\frac{r^{\sqrt{3r}}}{r^{\sqrt{A}}}\right)^r = \left(\frac{r^{r^{\sqrt{r}}}}{r^{r^{\sqrt{r}}}}\right)^r = \left(\frac{(r^r)^{r^{\sqrt{r}}}}{r^{r^{\sqrt{r}}}}\right)^r = \left(\frac{r^{A\sqrt{r}}}{r^{r^{\sqrt{r}}}}\right)^r$$

$$= \left(r^{r^{\sqrt{r}}}\right)^r = r^{r^r\sqrt{r}} = r^A \rightarrow A = r^r\sqrt{r}$$

۲ - گزینه ۲

$$r(r)^x > 8^x \rightarrow r^r \times r^x > r^{3x} \rightarrow r^{x+r} > r^{3x} \rightarrow x+r > 3x \rightarrow rx < r \rightarrow x < 1$$

۳ - گزینه ۲

$$\frac{1}{r^{x-1}} \geq (r\sqrt{r})^{rx} \rightarrow r^{1-x} \geq (r \times r^{\frac{1}{2}})^{rx} \rightarrow r^{1-x} \geq (r^{\frac{3}{2}})^{rx}$$

$$\rightarrow r^{1-x} \geq r^{3x} \rightarrow 1-x \geq 3x \rightarrow 1 \geq 4x \rightarrow \frac{1}{4} \geq x$$

۴ - گزینه ۴

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{rx} = 3r^{x+1} \Rightarrow (r^{-3})^{rx} = (r^5)^{x+1} \Rightarrow r^{-9x} = r^{5x+5}$$

$$\Rightarrow -9x = 5x + 5 \Rightarrow 14x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{14}$$

۵ - گزینه ۱

$$r^{-rx+1} < r^{4r} \rightarrow r^{-rx+1} < r^5 \xrightarrow{r>1} -rx+1 < 5 \rightarrow -rx < 4 \rightarrow x > -2$$

جهت عوض نمی‌شود

که جواب نامعادله، فقط شامل یک عدد صحیح منفی است ($x = -1$)

۶ - گزینه ۳

$$r^x - 6^x = 2 \times 9^x \Rightarrow r^{rx} - r^x \times 3^x = 2 \times 3^{rx} \xrightarrow{\div r^{rx}} \frac{r^{rx}}{r^{rx}} - \frac{r^x}{r^{rx}} = 2 \Rightarrow \left(\frac{r}{3}\right)^{rx} - \left(\frac{r}{3}\right)^x = 2$$

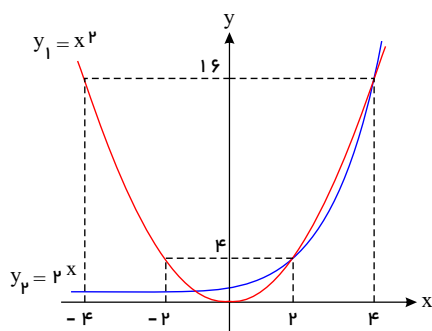
$$\left(\frac{r}{3}\right)^{x=t} \rightarrow t^r - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -1 \rightarrow \left(\frac{r}{3}\right)^x = -1 \rightarrow \text{امکان ندارد.} \\ t = -\frac{c}{a} = 2 \rightarrow \left(\frac{r}{3}\right)^x = 2 \rightarrow \text{امکان پذیر است.} \end{cases}$$

پس معادله یک ریشه دارد.

۷ - گزینه ۲

نمودار دو تابع $y_1 = x^2$ و $y_2 = x^3$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

نامعادله $x^2 \geq 2^x$ تنها در بازه $[2, 4]$ رخ می‌دهد که x^2 بالاتر از 2^x رسم شده است و این بازه شامل ۳ عدد طبیعی ۲، ۳ و ۴ است.



۸ - گزینه ۳

$$r^x - 4 + \left(\frac{1}{r}\right)^{x-1} = 0 \rightarrow r^x - 4 + (r^{-1})^{x-1} = 0$$

$$\rightarrow r^x - 4 + r^{1-x} = 0 \rightarrow r^x - 4 + \frac{r}{r^x} = 0$$

$$t^x = t \rightarrow t - 4 + \frac{4}{t} = 0 \rightarrow \frac{t^2 - 4t + 4}{t} = 0 \rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$\rightarrow (t - 2)^2 = 0 \rightarrow t = 2 \rightarrow 4^x = 2 \rightarrow 2^{2x} = 2 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۹ - گزینه ۳

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 20 \rightarrow 2^{-x} = 20. \text{ و } 16 < 20 < 32 \rightarrow 2^4 < 2^{-x} < 2^5$$

$$\rightarrow 4 < -x < 5 \rightarrow -4 > x > -5$$

۱۰ - گزینه ۲ برای پیدا کردن محل تقاطع دو تابع، کافی است که دو تابع را تلافی دهیم.

$$\begin{cases} f(x) = 4^x \\ g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow 4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2} \rightarrow 4^x = \frac{1}{4^x} + \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{4^x = A} A = \frac{1}{A} + \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2A} 2A^2 = 2 + 3A \rightarrow 2A^2 - 3A - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 9 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{3+5}{4} = 2 \\ A = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = 2 \rightarrow 4^x = 2 \rightarrow 2^{2x} = 2 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow y = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow A \left| \frac{1}{2} \right.$$

$$A = -\frac{1}{2} \rightarrow 4^x = -\frac{1}{2} \text{ امکان ندارد}$$

نقطه‌ی تلافی این دو تابع $A \left| \frac{1}{2} \right.$ است.

$$A \left| \frac{1}{2} \right., \quad B \left| -\frac{1}{2} \right. \rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

۱۱ - گزینه ۴ چون دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ محل برخورد این دو تابع است؛ پس:

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \rightarrow -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 1 - 1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 2 \rightarrow 2^{-A-B} = 2 \rightarrow -A - B = 1 \\ f(2) = g(2) \rightarrow -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 4 - 2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 2 \rightarrow 2^{-2A-B} = 2^2 \rightarrow -2A - B = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -A - B = 1 \\ -2A - B = 2 \end{cases} \rightarrow A = -1, B = 0 \rightarrow f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

$$\rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -2 + 2^3 = -2 + 8 = 6$$

۱۲ - گزینه ۳ چون دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ محل برخورد این دو تابع است؛ پس:

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \rightarrow 3^{A+B} = 1 = 3^0 \rightarrow A + B = 0 \\ f(3) = g(3) \rightarrow 3^{3A+B} = 9 = 3^2 \rightarrow 3A + B = 2 \end{cases} \rightarrow A = 1, B = -1$$

$$\text{پس: } f(x) = 3^{x-1} \rightarrow f(0) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

۱۲ - گزینه ۲

$$4^x - 3 \times 2^x - 4 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 3(2^x) - 4 = 0. \xrightarrow{2^x = A} A^2 - 3A - 4 = 0$$

$$\rightarrow (A - 4)(A + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = -1 \Rightarrow 2^x = -1 \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ A = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه است.

۱۴ - گزینه ۲

$$(\circ, \circ ۴)^{5x-x^2-8} < ۶۲۵ \rightarrow \left(\frac{۴}{۱۰۰}\right)^{5x-x^2-8} < ۵^۴ \rightarrow \left(\frac{۱}{۲۵}\right)^{5x-x^2-8} < ۵^۴$$

$$\rightarrow (\circ ۲)^{5x-x^2-8} < ۵^۴ \rightarrow ۵^{-۱۰x+۲x^2+۱۶} < ۵^۴$$

چون پایه بزرگ‌تر از یک می‌باشد ($۵ > ۱$) جهت نامعادله عوض نمی‌شود یعنی:

$$۲x^2 - ۱۰x + ۱۶ < ۴ \rightarrow ۲x^2 - ۱۰x + ۱۲ < ۰ \rightarrow x^2 - ۵x + ۶ < ۰$$

$$\rightarrow (x-۲)(x-۳) < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۲ < x < ۳$$

۱۵ - گزینه ۳ باید محدودهٔ جواب معادلهٔ $12 = (\sqrt{3})^x$ را به دست آوریم:

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 12 \rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 12 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \left(3^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 12^2 \rightarrow 3^x = 144$$

$$81 < 144 < ۲۴۳ \rightarrow 3^4 < 3^x < 3^5 \rightarrow 4 < x < ۵$$

۱۶ - گزینه ۴ اگر 3^x را t بنامیم، آن‌گاه به جای 9^x می‌گذاریم t^2 و به جای 3^{x+1} هم می‌نویسیم $۳t$. پس داریم:

$$t^2 - ۴(۳t) + ۲۷ = ۰ \Rightarrow t^2 - ۱۲t + ۲۷ = ۰ \Rightarrow (t-۳)(t-9) = ۰$$

$$\begin{cases} t = ۳ = 3^{x_1} \Rightarrow x_1 = 1 \\ t = 9 = 3^{x_2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = ۳$$

۱۷ - گزینه ۲

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{-(x^2+ax+b)} = 10^2 \rightarrow 10^{x^2+ax+b} = 10^2 \rightarrow x^2 + ax + b = 2 \rightarrow x^2 + ax + b - 2 = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} \rightarrow ۶ = \frac{b-2}{1} \rightarrow b-2 = ۶ \rightarrow b = 8 \\ \text{جمع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} \rightarrow ۵ = -a \rightarrow a = -5 \end{cases}$$

۱۸ - گزینه ۳

طبق فرض سؤال داریم:

$$3^x = ۶ \Rightarrow 2 < x < ۳$$

$$3^y = ۵ \Rightarrow 1 < y < 2$$

در نتیجه:

$$3^{|x+2y-4|+|2y-4|} = 3^{x+2y-4+4-2y} = 3^x \xrightarrow{\text{بنا بر فرض سؤال}} ۶$$

۱۹ - گزینه ۲

$$\frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 10^x + 10^{-x} = 2(10^x - 10^{-x})$$

$$\Rightarrow 10^x + \frac{1}{10^x} = 2\left(10^x - \frac{1}{10^x}\right) \Rightarrow 10^{2x} + 1 = 2(10^{2x} - 1)$$

$$\Rightarrow 10^{2x} + 1 = 2 \times 10^{2x} - 2 \Rightarrow 10^{2x} = 3 \xrightarrow{\log_b^a = c \rightarrow b^c = a} \log_{10} 3 = 2x$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{2} \log_{10} 3$$

۲۰ - گزینه ۳

$$\frac{\sqrt{3}}{27} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x = \sqrt{27} \left(\frac{\sqrt{3}}{243}\right)^{x-x} \rightarrow \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^3} \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^x = 3^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^5}\right)^{x-x}$$

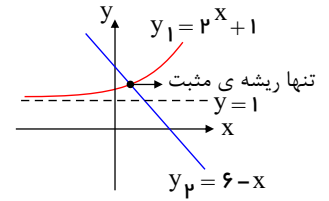
$$\rightarrow 3^{-\frac{5}{2}} \times 3^{-\frac{x}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \left(3^{-\frac{9}{2}}\right)^{x-x} \rightarrow 3^{-\frac{5}{2}-\frac{x}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{9x-27}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{15-2x}{6} = \frac{9x-27}{2} \rightarrow \frac{-15-2x}{6} = \frac{9x-27}{2}$$

$$\rightarrow 3(9x-27) = -15-2x \rightarrow 27x-72 = -15-2x \rightarrow 29x = 57 \rightarrow x = \frac{57}{29}$$

۲۱- گزینه ۱ کافی است $y_1 = 2^x + 1$, $y_2 = 6 - x$ را رسم کنیم و مشاهده کنیم در چند جا همدیگر را قطع می کنند.

$$\underbrace{2^x + 1}_{y_1} = \underbrace{6 - x}_{y_2}$$



۲۲- گزینه ۱

$$2^x - 125 = \frac{384}{2^x} \xrightarrow{\times 2^x} 2^{2x} - 125 \times 2^x = 384 \rightarrow (2^x)^2 - 125(2^x) - 384 = 0$$

$$\xrightarrow{2^x = A} A^2 - 125A - 384 = 0 \rightarrow (A - 128)(A + 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 128 \rightarrow 2^x = 128 \rightarrow x = 7 \rightarrow x^2 + 2x = 49 + 14 = 63 \\ A = -3 \rightarrow 2^x = -3 \rightarrow \text{امکان ندارد} \end{cases}$$

۲۳- گزینه ۴

$$\frac{2^{x+y}}{27^x} = \left(\frac{1}{36}\right)^x \rightarrow \frac{(2^x \times 3^y)^{x+y}}{(3^3)^x} = \left(\frac{1}{2^2 \times 3^2}\right)^x$$

$$\rightarrow \frac{2^{x^2+y^2} \times 3^{xy}}{3^{3x}} = (2^x \times 3^y)^{-x} \rightarrow 2^{x^2+y^2} \times 3^{-x+y^2} = 2^{-x} \times 3^{-x}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = -6 \\ -x + 2y = -6 \end{cases} \rightarrow x = \frac{2}{3}, y = -\frac{8}{3}$$

$$\text{پس } \frac{x}{y} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{8}{3}} = -\frac{1}{4} \text{ است.}$$

۲۴- گزینه ۲

$$12^{3x-4} \times 18^{4-2x} = 1458 \rightarrow (2^2 \times 3)^{3x-4} \times (3^2 \times 2)^{4-2x} = 2 \times 3^6$$

$$\rightarrow (2^{6x-8})(3^{9x-12})(2^{4-2x})(3^{8-4x}) = 2 \times 3^6 \rightarrow (2^{4x-4})(3^{5x-4}) = 2 \times 3^6$$

$$\rightarrow \frac{2^{4x-4}}{3^{10-x}} = \frac{3^6}{2} \rightarrow 2^{4x-2} = 3^{x-6} \xrightarrow{2^a=3^b} a = 4x-2, b = x-6 \rightarrow a+b = 5x-8$$

۲۵- گزینه ۱

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16} \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$$

$$\rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow x-1-\frac{1}{x} = 2 \xrightarrow{\times x} x^2 - x - 1 = 2x$$

$$\rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow x' + x'' = -\frac{b}{a} = 3$$

۲۶- گزینه ۴

$$f(-1) = 6 \Rightarrow a\left(\frac{3}{4}\right)^{1-b} + 2 = 6 \Rightarrow a\left(\frac{3}{4}\right)^{1-b} = 4 \quad (1)$$

$$f(1) = 11 \Rightarrow a\left(\frac{3}{4}\right)^{1+b} + 2 = 11 \Rightarrow a\left(\frac{3}{4}\right)^{1+b} = 9 \quad (2) \xrightarrow{(1),(2)} \frac{a\left(\frac{3}{4}\right)^{1-b}}{a\left(\frac{3}{4}\right)^{1+b}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{-2b} = \frac{4}{9} \Rightarrow -2b = -2 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{(1)} a = 4$$

ر. نتیجه:

$$f(x) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 2 \Rightarrow f(0) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + 2 = 6 + 2 = 8$$