پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{(\sin a - \cos a)^{۲} = ۱ - \sin ۲a}$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱ - \sin ۲\alpha = \frac{۱}{۴} \to \sin ۲\alpha = \frac{۳}{۴}$$

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha) = -\sin ۲\alpha = -\frac{۳}{۴}$$

۲ - گزینه ۲

$$A = \tan\frac{۱۱\pi}{۴} + \sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}$$

$$\tan(\frac{۱۱\pi}{۴}) = \tan(\frac{۱۲\pi - \pi}{۴}) = \tan(۳\pi - \frac{\pi}{۴}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\sin(\frac{۱۵\pi}{۴}) = \sin(\frac{۱۶\pi - \pi}{۴}) = \sin(۴\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\sin(\frac{\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos(\frac{۱۳\pi}{۴}) = \cos(\frac{۱۲\pi + \pi}{۴}) = \cos(۳\pi + \frac{\pi}{۴}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$A = -۱ + (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) \cdot (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -۱ + \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

۳ - گزینه ۲ تمام زاویه‌ها به ۲۰° تبدیل شود، داریم:

$$\cos ۴۳۰^\circ = \cos(۳۶۰^\circ + ۷۰^\circ) = \cos ۷۰^\circ = \cos(۹۰^\circ - ۲۰^\circ)$$

$$\sin ۶۱۰^\circ = \sin(۳۶۰^\circ + ۲۵۰^\circ) = \sin ۲۵۰^\circ = \sin(۲۷۰^\circ - ۲۰^\circ)$$

$$\frac{\sin(۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ) + ۳\cos(۹۰^\circ - ۲۰^\circ) - \sin(۹۰^\circ + ۲۰^\circ)}{۲\sin(۲۷۰^\circ - ۲۰^\circ) - \cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ)} = \frac{\sin ۲۰^\circ + ۳\sin ۲۰^\circ - \cos ۲۰^\circ}{-۲\cos ۲۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}$$

$$= \frac{۴\sin ۲۰^\circ - \cos ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ} = -۴\tan ۲۰^\circ + ۱ = -۴(۰/۳۷۵) + ۱ = -۱/۵ + ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

۴ - گزینه ۴

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{۲} - \alpha$$

$$\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)}{\sin\beta} = \frac{-\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

۵ - گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را برحسب ۱۵° می‌نویسیم:

$$\cos ۲۸۵^\circ = \cos(۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ \ , \ \sin ۲۵۵^\circ = \sin(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\cos ۱۵^\circ$$
$$\sin ۵۲۵^\circ = \sin(۵۴۰^\circ - ۱۵^\circ) = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ \ , \ \sin ۱۰۵^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۱۵^\circ) = \cos ۱۵^\circ$$

بنابراین داریم: $\dfrac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ} = \dfrac{\sin ۱۵^\circ + \cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ}$

تمام جملات را بر $\cos ۱۵^\circ$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan ۱۵^\circ + ۱}{\tan ۱۵^\circ - ۱} = \frac{۰/۲۸ + ۱}{۰/۲۸ - ۱} = \frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲} = \frac{-۱۲۸}{۷۲} = -\frac{۱۶}{۹}$$

۶ - گزینه ۲

می دانیم: $\boxed{\sin u \cdot \cos u = \frac{۱}{۲}\sin ۲u}$

$$\sin\frac{\pi}{۱۲}\sin\frac{۷\pi}{۱۲} = \sin\frac{\pi}{۱۲}\sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۱۲}) = \sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱}{۲}\sin(\frac{۲\pi}{۱۲}) = \frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۴}$$

۷ - گزینه ۳ هرکدام از نسبت‌های مثلثاتی داده‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\sin\frac{۱۷\pi}{۳}=\sin(۶\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin(\frac{-\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})=\cos\frac{۱۷\pi}{۶}=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۶})=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۱۹\pi}{۴}=\tan(۵\pi-\frac{\pi}{۴})=\tan(\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})=-\sin\frac{۱۱\pi}{۶}=-\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=-\sin(\frac{-\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

پس : $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})=(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})+(-۱)(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

۸ - گزینه ۳

ابتدا تمام زوایا را برحسب ۲۰° می‌نویسیم:

$$\sin ۲۵۰^\circ=\sin(۲۷۰^\circ-۲۰^\circ)=-\cos ۲۰^\circ\ ,\ \sin ۷۰۰^\circ=\sin(۷۲۰^\circ-۲۰^\circ)=\sin(-۲۰^\circ)=-\sin ۲۰^\circ$$
$$\cos ۵۶۰^\circ=\cos(۵۴۰^\circ+۲۰^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)=-\cos ۲۰^\circ\ ,\ \cos ۱۱۰^\circ=\cos(۹۰^\circ+۲۰^\circ)=-\sin ۲۰^\circ$$

بنابراین داریم: $\frac{\sin ۲۵۰^\circ+\sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ-\cos ۱۱۰^\circ}=\frac{-\cos ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}$

تمام جملات را بر $\cos ۲۰$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{-۱-\tan ۲۰^\circ}{-۱+\tan ۲۰^\circ}=\frac{-۱-۰/۴}{-۱+۰/۴}=\frac{-۱/۴}{-۰/۶}=\frac{۱۴}{۶}=\frac{۷}{۳}$$

۹ - گزینه ۴

$$\frac{\cos(۳\frac{\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cot\theta$$
$$=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰}{۲}=\frac{۲}{۴}+\frac{۱۰}{۴}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

۱۰ - گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\sin\left(\frac{۱۱\pi}{۲}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{۸\pi+۳\pi}{۲}+\alpha\right)=\sin\left(۴\pi+\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right)=\sin\left(۳\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)$$

عبارات را خلاصه می‌کنیم.

$$A=\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha-\cos\alpha=-۲\cos\alpha$$
$$B=۲\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right)=-۲\sin\alpha-\sin\alpha=-۳\sin\alpha$$

با فرض $A=۲B$ خواهیم داشت: $-۲\cos\alpha=-۶\sin\alpha\Rightarrow\cot\alpha=۳$

۱۱ - گزینه ۲

$$\tan\frac{۱۷\pi}{۶}\sin\frac{۱۱\pi}{۳}+\cos\frac{۱۰\pi}{۳}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۶})\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۳})+\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۳})$$

$$=\tan(-\frac{\pi}{۶})\sin(-\frac{\pi}{۳})+\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})=(-\tan\frac{\pi}{۶})(-\sin\frac{\pi}{۳})-\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$=\tan\frac{\pi}{۶}\sin\frac{\pi}{۳}-\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}-\frac{۱}{۲}=۰$$

۱۲ - گزینه ۱ اگر دو زاویهٔ α و β متمم باشند، داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\cos\beta\ ,\ \cos\alpha=\sin\beta\\ \tan\alpha=\cot\beta\ ,\ \cot\alpha=\tan\beta\end{cases}$$

چون $۷x=\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$x+۶x=۷x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\cos x=\sin ۶x$$
$$۲x+۵x=۷x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\sin ۲x=\cos ۵x$$

$$۳x + ۴x = ۷x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \tan ۳x = \cot ۴x$$

$$\frac{\cos x \sin ۲x \tan ۳x}{\cot ۴x \cos ۵x \sin ۶x} = \frac{\sin ۶x \cos ۵x \cot ۴x}{\cot ۴x \cos ۵x \sin ۶x} = ۱$$

۱۳ - گزینه ۲ اگر $\alpha + \beta = \pi$ باشد آن گاه $\cos\alpha + \cos\beta = ۰$ است پس:

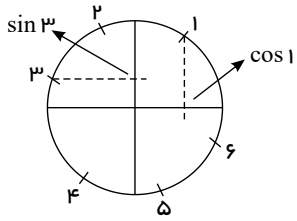
$$(x + ۳۰^\circ) + (۲x + ۶۰^\circ) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳x = ۹۰^\circ \Rightarrow x = ۳۰^\circ$$

آن گاه:

$$\frac{۱ + \tan ۳۰^\circ}{۱ + \cot ۳۰^\circ} = \frac{۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱ + \sqrt{۳}} = \frac{\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳}}{۱ + \sqrt{۳}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۱)}{۳}}{۱ + \sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۴ - گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ و زوایای داده شده در گزینه‌ها برحسب رادیان هستند.

$$۱rad \approx ۵۷^\circ \Rightarrow \begin{cases} ۲rad \simeq ۱۱۴^\circ \\ ۳rad \approx ۱۷۱^\circ \\ ۴rad \approx ۲۲۸^\circ \end{cases}$$



گزینهٔ «۱» نادرست است، زیرا: $\sin ۴ < ۰ < \cos(-۱)$

گزینهٔ «۲» نادرست است، زیرا: $\cos ۲ < ۰ < \sin ۱$

گزینهٔ «۴» نادرست است، زیرا: $\cos(-۲) < ۰ < \sin(-۴)$

گزینهٔ «۳» با توجه به دایرهٔ مثلثاتی (شکل بالا) درست است.

۱۵ - گزینه ۱

$$\frac{A\sin ۱۰۸^\circ + \cos ۷۲^\circ}{A\sin ۹۱۸^\circ} = \frac{A\sin(۹۰^\circ + ۱۸^\circ) + \cos(۹۰^\circ - ۱۸^\circ)}{A\sin(۷۲۰^\circ + ۱۹۸^\circ)}$$

$$= \frac{A\cos ۱۸^\circ + \sin ۱۸^\circ}{A\sin ۱۹۸^\circ} = \frac{A\cos ۱۸^\circ + \sin ۱۸^\circ}{A\sin(۱۸۰^\circ + ۱۸^\circ)} = \frac{A\cos ۱۸^\circ + \sin ۱۸^\circ}{-A\sin ۱۸^\circ}$$

$$= \frac{A\cos ۱۸^\circ}{-A\sin ۱۸^\circ} + \frac{\sin ۱۸^\circ}{-A\sin ۱۸^\circ} = -\cot ۱۸^\circ - \frac{۱}{A} = \frac{۲}{۳}$$

$$\to -\frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{A} = \frac{۲}{۳} \to \frac{۱}{A} = -\frac{۱}{\alpha} - \frac{۲}{۳} \to \frac{۱}{A} = \frac{-۳ - ۲\alpha}{۳\alpha}$$

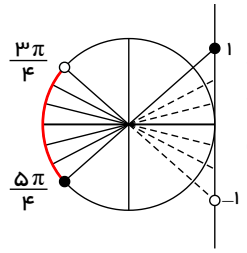
$$\to A = \frac{۳\alpha}{-۳ - ۲\alpha} = \frac{-۳\alpha}{۳ + ۲\alpha}$$

۱۶ - گزینه ۴

$$\frac{۳\pi}{۸} < \alpha \le \frac{۵\pi}{۸} \xrightarrow{\times ۲} \frac{۳\pi}{۴} < ۲\alpha \le \frac{۵\pi}{۴} \xrightarrow{۲\alpha = x} \frac{۳\pi}{۴} < x \le \frac{۵\pi}{۴}$$

باتوجه به دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌شود که $-۱ < \tan x \le ۱$، داریم:

$$-۱ < \frac{-m + ۱}{۲} \le ۱ \to -۲ < -m + ۱ \le ۲ \to -۳ < -m \le ۱ \to -۱ \le m < ۳ \to m \in [-۱, ۳)$$



۱۷ - گزینه ۲

$$\sin^۲\frac{\pi}{۸} + \sin^۲\frac{۳\pi}{۸} + \sin^۲\frac{۵\pi}{۸} + \sin^۲\frac{۷\pi}{۸}$$

$$= \sin^۲\frac{\pi}{۸} + \sin^۲\frac{۳\pi}{۸} + \cos^۲(\frac{\pi}{۲} - \frac{۵\pi}{۸}) + \cos^۲(\frac{\pi}{۲} - \frac{۷\pi}{۸})$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$$
$$=(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8})+(\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8})=1+1=2$$

۱۸ - گزینه ۱

$$\frac{2\sin 200^\circ+\cos 290^\circ}{\sin 160^\circ+2\cos 70^\circ}=\frac{2\sin(180^\circ+20^\circ)+\cos(270^\circ+20^\circ)}{\sin(180^\circ-20^\circ)+2\cos(90^\circ-20^\circ)}$$

$$=\frac{-2\sin 20^\circ+\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ+2\sin 20^\circ}=\frac{-\sin 20^\circ}{3\sin 20^\circ}=-\frac{1}{3}$$

۱۹ - گزینه ۲

می‌دانیم که $\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$ **است.**

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{10}{100}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}\Rightarrow\sin\theta=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیهٔ سوم}}\sin\theta=\frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{10}}{10}}{-\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{1}{3}$$

۲۰ - گزینه ۱ می‌دانیم $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ **بنابراین:**

$$A=[\tan\frac{\pi}{5}]+[\tan\frac{2\pi}{5}]+[\tan(\pi-\frac{2\pi}{5})]+[\tan(\pi-\frac{\pi}{5})]$$
$$\Rightarrow A=[\tan\frac{\pi}{5}]+[\tan\frac{2\pi}{5}]+[-\tan\frac{2\pi}{5}]+[-\tan\frac{\pi}{5}]$$
$$\Rightarrow A=([\tan\frac{\pi}{5}]+[-\tan(\frac{\pi}{5})]+([\tan\frac{2\pi}{5}]+[-\tan\frac{2\pi}{5}])$$

می‌دانیم $\tan\frac{\pi}{5},\tan\frac{2\pi}{5}\notin Z$ **از طرفی اگر** $x\notin Z$**، آن‌گاه** $[x]+[-x]=-1$**، بنابراین:**

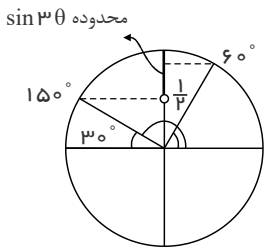
$$A=(-1)+(-1)=-2$$

۲۱ - گزینه ۳

$$\sin(-\frac{7\pi}{6})+2\tan(\frac{25\pi}{4})-3\cos(\frac{124\pi}{3})=-\sin(\frac{7\pi}{6})+2\tan(\frac{25\pi}{4})-3\cos(\frac{124\pi}{3})=-\sin(\pi+\frac{\pi}{6})+2\tan(6\pi+\frac{\pi}{4})-3\cos(41\pi+\frac{\pi}{3})$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}+2\tan\frac{\pi}{4}-3\cos(\pi+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}+2\times1+3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2}+3\times\frac{1}{2}=4$$

۲۲ - گزینه ۳ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم:



$$\to 20^\circ<\theta<50^\circ\Rightarrow 60^\circ<3\theta<150^\circ\Rightarrow\frac{1}{2}<\sin 3\theta\le 1$$

$$\frac{1}{2}<\frac{m-1}{2}\le 1\Rightarrow 1<m-1\le 2\Rightarrow 2<m\le 3\Rightarrow m\in(2,3]$$

۲۳ - گزینه ۲

$$\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha-3\pi)=-\sin(2\pi+\pi-\alpha)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha-\frac{3\pi}{2})=-\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\frac{\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})-2\sin(\alpha-3\pi)}{3\sin(\alpha-\frac{3\pi}{2})}=2\Rightarrow\frac{\sin\alpha-2(-\sin\alpha)}{3\cos\alpha}=2\Rightarrow\frac{3\sin\alpha}{3\cos\alpha}=2$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=2\Rightarrow\cot\alpha=\frac{1}{2}$$

۲۴ - گزینه ۱

$$\frac{3\cos(180^\circ+90^\circ-20^\circ)-\sin(360^\circ-20^\circ)}{\sin(90^\circ+20^\circ)+2\cos(180^\circ-20^\circ)}=a$$

$$\Rightarrow\frac{-3\cos(90^\circ-20^\circ)-\sin(-20^\circ)}{\cos 20^\circ-2\cos 20^\circ}=a\Rightarrow\frac{-3\sin 20^\circ+\sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ}=a$$

$$\Rightarrow\frac{-2\sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ}=a\Rightarrow 2\tan 20^\circ=a\Rightarrow\tan 20^\circ=\frac{a}{2}$$

۲۵ - گزینه ۱

$$\begin{cases}2\cos(\pi-x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)<0\Rightarrow-2\cos x+\cos x<0\Rightarrow-\cos x<0\Rightarrow\cos x>0\\ \tan(\frac{\pi}{2}-x)-\tan(\frac{\pi}{2}+x)>0\Rightarrow\cot x+\cot x>0\Rightarrow 2\cot x>0\Rightarrow\cot x>0\end{cases}$$

فقط در ناحیهٔ اول است که هم کسینوس و هم کتانژانت مثبت هستند.

۲۶ - گزینه ۱ اگر $[x]$ زوج باشد آنگاه:

$$(-1)^{[x]}f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\geq 0$$

اگر $[x]$ فرد باشد آنگاه:

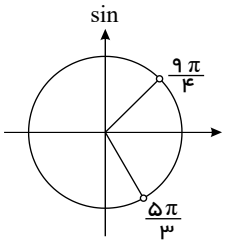
$$(-1)^{[x]}f(x)=|f(x)|\Rightarrow -f(x)=|f(x)|\Rightarrow f(x)\leq 0$$

تابع $f(x)=\sin\pi x$ ویژگی های بالا را دارد.

۲۷ - گزینه ۱ با به‌دست آوردن محدودهٔ $2x$ داریم:

$$-\frac{\pi}{18}<\frac{x-\pi}{3}<\frac{\pi}{24}\xrightarrow{\times 3}-\frac{\pi}{6}<x-\pi<\frac{\pi}{8}$$

$$\xrightarrow{+\pi}\frac{5\pi}{6}<x<\frac{9\pi}{8}\xrightarrow{\times 2}\frac{5\pi}{3}<2x<\frac{9\pi}{4}$$



$$\cos\rightarrow\begin{cases}\cos\frac{9\pi}{4}=\cos(2\pi+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos 0=1\\ \cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

در این بازه، $\cos 2x$ هریک از مقادیر بازهٔ $(\frac{1}{2},1]$ را می‌تواند اختیار کند.

یعنی:

$$\frac{1}{2}<\cos 2x\leq 1\Rightarrow\frac{1}{2}<2m-1\leq 1\Rightarrow\frac{3}{4}<m\leq 1$$

۲۸ - گزینه ۳ طول ضلع AB برابر $\tan\alpha$ می‌باشد، پس مساحت مثلث AOB برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\times AB\times OA\xrightarrow{OA=1}S=\frac{1}{2}\times\tan\alpha$$

مختصات نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ می‌باشد.

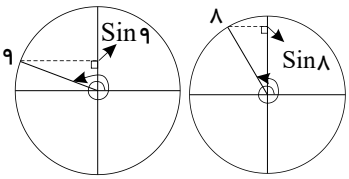
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow(2a-1)^2+a^2=1\Rightarrow 5a^2-4a+1=1\Rightarrow a(5a-4)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}a=0 & \text{غ ق ق}\\ a=\frac{4}{5} & \text{ق ق}\end{cases}$$

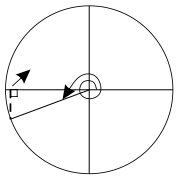
پس $\cos\alpha$ برابر $\frac{4}{5}$ می‌باشد و $\sin\alpha$ برابر $\frac{3}{5}$ است.

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}\rightarrow S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

۲۹ - گزینه ۲ زاویه‌های داده‌شده برحسب رادیان هستند و هر رادیان تقریباً برابر با ۵۷ درجه است.



$\Rightarrow ۰ < \sin ۸ - \sin ۹ < ۱ \Rightarrow [\sin ۸ - \sin ۹] = ۰$



$\Rightarrow -۱ < \cos ۱۰ < ۰ \Rightarrow [\cos ۱۰] = -۱ \Rightarrow A = ۲(۰) + (-۱) = -۱$

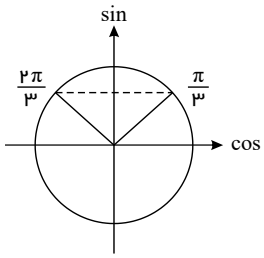
۳۰ - گزینه ۲ برای آنکه گلوله قبل از برخورد به زمین به دیوار برخورد کند، باید فاصلهٔ افقی طی شدهٔ آن بزرگ‌تر از $۵\sqrt{۳}$ باشد، پس داریم:

$$d > ۵\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{v^۲ \sin ۲\alpha}{۱۰} > ۵\sqrt{۳} \xrightarrow{v=۱۰} \sin ۲\alpha > \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

چون α زاویهٔ حاده است، پس ۲α از ۰ تا π می‌تواند باشد. سینوس زاویه‌های $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۲\pi}{۳}$ در این بازه برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. طبق دایرهٔ مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{۳} < ۲\alpha < \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۶} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$$

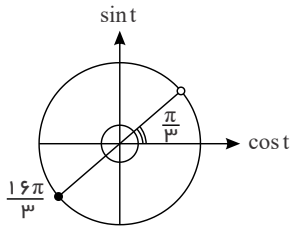
به‌ازای $\alpha = \frac{\pi}{۶}$ و $\alpha = \frac{\pi}{۳}$ گلوله پای دیوار فرود می‌آید و به‌ازای $\frac{\pi}{۶} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$ گلوله بالاتر از سطح زمین به دیوار برخورد می‌کند.



۳۱ - گزینه ۲ تابع $f(x)$ را در مقادیر نوشته شده، به طور دقیق می‌نویسیم:

$$f(\frac{۱۶\pi}{۳}) = \min\{\sin t : \frac{\pi}{۳} < t \leq \frac{۱۶\pi}{۳}\} \quad (I)$$

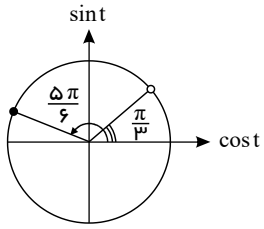
$$f(\frac{۵\pi}{۶}) = \min\{\sin t : \frac{\pi}{۳} < t \leq \frac{۵\pi}{۶}\} \quad (II)$$



I) با توجه به شکل بالا در این بازهٔ t، $\sin t$ تمام مقادیر را به خودش می‌گیرد. بنابراین: $\min\{\sin t\} = -۱$

II) با توجه به شکل روبه‌رو در این بازه، کم‌ترین مقدار $\sin t$ برابر با $\sin \frac{۵\pi}{۶}$ می‌باشد:

$$\min\{\sin t\} = \frac{۱}{۲}$$

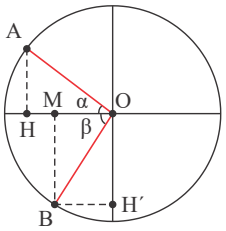


با توجه به (I) و (II) داریم:

$$\underbrace{f(\frac{۱۶\pi}{۳})}_{-۱} + \underbrace{f(\frac{۵\pi}{۶})}_{\frac{۱}{۲}} = -۱ + \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

۳۲ - گزینه ۱

می‌دانیم $\cos x = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}, \quad \sin x = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}, \quad P = ۲\pi r$ محیط دایره



محیط دایره $= ۲\pi(۲) = ۴\pi$

اندازهٔ کمان $AB = \pi$

چون اندازهٔ کمان $\frac{۱}{۴}$ **اندازهٔ محیط است پس زاویهٔ** AOB **برابر ۹۰ درجه است.**

در مثلث OAH **داریم:**

$$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \alpha = ۳۰^{\circ} \Rightarrow \beta = ۹۰ - ۳۰ = ۶۰$$

در مثلث OBM **داریم:**

$$\cos\beta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{OM}{۲} \Rightarrow \cos ۶۰ = \frac{۱}{۲} = \frac{OM}{۲} \Rightarrow OM = ۱$$

چون B **در قسمت منفی است پس طول نقطهٔ** B **عدد** -۱ **است.**

$$\sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BM}{۲} \Rightarrow BM = \sqrt{۳}$$

چون B **در قسمت منفی است پس عرض نقطهٔ** B **عدد** $-\sqrt{۳}$ **است بنابراین:** $B(-۱, -\sqrt{۳})$