

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است و چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ است انتهای کمان در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است.

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\underbrace{\frac{1}{|\cos x|}}_{-1}} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = -\cos^2 x$$

۲ - گزینه ۴ می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است و چون $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ است انتهای کمان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است.

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right) = \frac{1}{\underbrace{|\cos x|}_{-1}} (1 - \sin^2 x) = \frac{-1}{\cos x} (\cos^2 x) = -\cos x$$

۳ - گزینه ۲ می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است.

ابتدا طرفین تساوی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div \cos^2 x} 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \frac{\sin x}{\cos x} + 4 = \frac{3}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 \tan^2 x - 3 \tan x + 4 = 3(1 + \tan^2 x)$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + 3 \tan x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

$\tan x$ مجموعه مقادیر ممکن برای $1 + (-4) = -3$

۴ - گزینه ۲

$$\sin\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin(2\pi + \frac{\pi}{2} - \theta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$A = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{3}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۵ - گزینه ۴

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\sin x + \cos x)^2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

۶ - گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

صورت و مخرج را به $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$B = \frac{\tan^6 x}{3\left(\frac{1}{\cos^6 x}\right) + \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^6 x}{3\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \frac{1}{\cos^2 x}}$$

باتوجه به اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ داریم: $\tan x = 2$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + 4 = 5 \quad \text{پس:}$$

$$B = \frac{2^6}{3 \times 5 + 5} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}$$

۷ - گزینه ۲ باتوجه به $\cot \alpha = 2$ یک رابطه بین $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ بدست می آوریم.

$$\cot \alpha = 2 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \xrightarrow{\sin \alpha \neq 0} \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

حال در صورت تست، به جای تمام $\cos \alpha$ ها، مساوی آن یعنی $2 \sin \alpha$ را قرار می دهیم.

$$\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^6 \alpha + (2 \sin \alpha)^6 \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha (2 \sin \alpha)^2}$$

$$= \frac{\sin^6 \alpha + 16 \sin^8 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \times 4 \sin^4 \alpha} = \frac{\sin^6 \alpha + 16 \sin^9 \alpha}{16 \sin^6 \alpha} = \frac{9 \sin^6 \alpha}{16 \sin^6 \alpha} = \frac{9}{16}$$

۸ - گزینه ۳

$$f(x) = -(\sin^2 x - \sin x) + 1 = -\left(\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \sin x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{4} \leq -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow -\frac{9}{4} + \frac{5}{4} \leq -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4} \Rightarrow \min f = -1$$

۹ - گزینه ۳ عبارت $\tan^2 x + \cot^2 x$ را ساده تر می نویسیم:

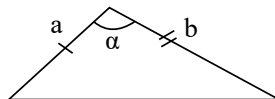
$$\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - \underbrace{2 \tan x \cot x}_1 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 - 2 = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)^2 - 2 = \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2 - 2 \quad (*)$$

طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می رسانیم:

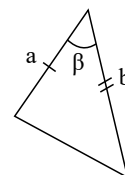
$$\sin x + \cos x = \frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{(*)} \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2 - 2 = 6^2 - 2 = 34$$

۱۰ - گزینه ۳



شکل (۱)



شکل (۲)

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{1}{2} ab \sin \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \cot \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \Rightarrow \sin^2 \beta = \cos \beta$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 \beta = \cos \beta \Rightarrow \cos^2 \beta + \cos \beta - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos \beta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$-1 \leq \cos \beta \leq 1 \Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \sin^r \alpha = \sin^r \beta$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^r \alpha = 1 - \cos^r \beta \Rightarrow \cos^r \alpha = \cos^r \beta \Rightarrow |\cos \alpha| = |\cos \beta| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow -\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$