

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ اگر C واسطه‌ی هندسی بین دو عدد a, b باشد خواهیم داشت:

$$C = \sqrt{ab} = \sqrt{2^2 \times 5 \times 7^2 \times 2 \times 5^2 \times 11^2} = \sqrt{2^4 \times 7^2 \times 5^3 \times 11^2} \Rightarrow C = 2^2 \times 7 \times 5^2 \times 11 = 7700$$

۲ - گزینه ۱ اگر c واسطه‌ی هندسی a و b باشد، داریم:

$$c = \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳ - گزینه ۱

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{12}{x+2} \Rightarrow 9x + 18 = 12x \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$$

۴ - گزینه ۲

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{EF}{20} \Rightarrow EF = 5$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{MN}{20} \Rightarrow MN = \frac{15}{2}$$

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{PQ}{20} \Rightarrow PQ = \frac{35}{2}$$

$$EF + MN + PQ = 5 + \frac{15}{2} + \frac{35}{2} = 30$$

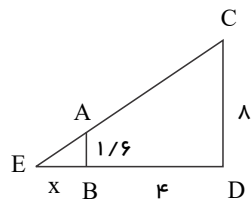
۵ - گزینه ۴ با توجه به موازی بودن پاره‌خط‌های موجود می‌توان از قضیهٔ تالس استفاده کرد:

$$\left. \begin{array}{l} BE \parallel CF \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} \\ EC \parallel FD \rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AE}{EF} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{4+x}{2x-1}$$

$$8x - 4 = 4x + x^2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$AD = 4 + x + (2x - 1) = 4 + 2 + 3 = 9$$

۶ - گزینه ۲ با توجه به تصویر میله‌ی پرچم و شخص مورد نظر بر سطح عمود می‌باشند. پس این دو باهم موازی هستند و می‌توان از قضیه‌ی تالس استفاده کرد.



$$\frac{x}{x+4} = \frac{1/6}{8} \rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$5x = x + 4 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1$$

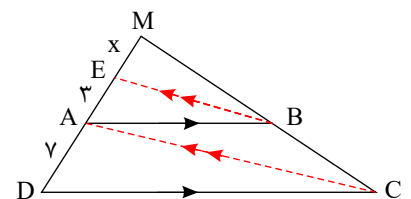
پس طول پاره‌خط $EB = 1$ و طول $DE = 5$.

حال طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$EC = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

۷ - گزینه ۲ کافی است دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\Delta}{MAC} : BE \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ \overset{\Delta}{MDC} : AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD}$$



$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{7} \Rightarrow 7x = 3x + 9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 2.25$$

در نتیجه: $MD = 2.25 + 3 + 7 = 12.25$

۸ - گزینه ۴ AB ، EF و DC ، هر سه بر BC عمودند پس با هم موازیند. حال:

$$\triangle ABC : EF \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FC}{BC} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{\lambda}{12} \quad (1)$$

$$\triangle BCD : EF \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{DC} \Rightarrow \frac{EF}{DC} = \frac{4}{12} \quad (2)$$

$$\frac{\frac{EF}{AB}}{\frac{EF}{DC}} = \frac{\frac{\lambda}{12}}{\frac{4}{12}} \Rightarrow \frac{DC}{AB} = 2 \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{1}{2} \quad \text{از تقسیم طرفین رابطه ی (۱) و (۲) داریم:}$$

۹ - گزینه ۱ با توجه به اینکه M و N وسط دو ساق قرار گرفته می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = 1 \rightarrow MN \parallel AB \parallel DC$$

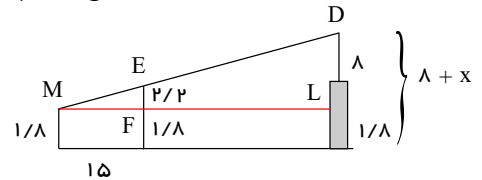
$$ME \parallel AB \xrightarrow{\triangle ADB} \frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{1}{2} \rightarrow ME = \frac{1}{2} AB = 4$$

$$MF \parallel DC \xrightarrow{\triangle DAC} \frac{MF}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2} \rightarrow MF = \frac{1}{2} DC = 6$$

$$EF = MF - ME = 6 - 4 = 2$$

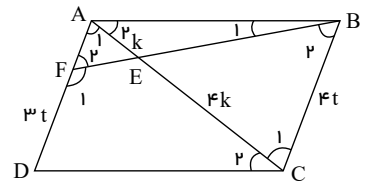
۱۰ - گزینه ۲ از نقطه ی M موازی خطی موازی سطح افق رسم کرده، با توجه به شکل و قضیه ی تالس داریم:

$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{2,2}{\lambda + x - 1,8} = \frac{15}{18} = \frac{1}{12} \Rightarrow x = 20,2$$



۱۱ - گزینه ۳ از آن جایی که $AC = 5AE$ ، نتیجه می گیریم اگر $AE = k$ ، آن گاه $EC = 4k$ ، از طرفی داریم:

$$AF \parallel BC \begin{cases} \hat{B}_r = \hat{F}_r \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{cases} \rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ECB$$

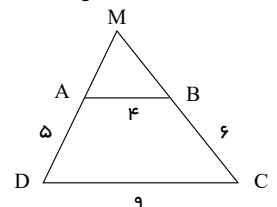


$$\rightarrow \frac{AF}{BC} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{AF}{BC} = \frac{k}{4k} = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} AF = t \\ BC = 4t \end{cases}$$

حال با توجه به این که در متوازی الاضلاع، اضلاع روبه رو برابرند، خواهیم داشت:

$$DF = AD - AF = BC - AF = 4t - t = 3t \rightarrow \frac{AF}{DF} = \frac{t}{3t} = \frac{1}{3}$$

۱۲ - گزینه ۴ بنابر فرض تست شکل زیر را خواهیم داشت.



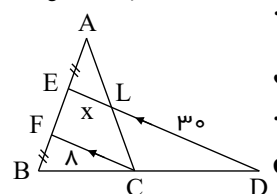
$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} = \frac{MB}{MC} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{MA}{MD} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{تقسیم در مخرج}} \frac{MA}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow MA = 4$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{تقسیم در مخرج}} \frac{MB}{6} = \frac{4}{5} \Rightarrow MB = \frac{24}{5} = 4,8$$

$$\triangle MAB \text{ محیط} = MA + MB + AB = 4 + 4 + 4,8 = 12,8$$

۱۳ - گزینه ۲ با توجه به فرض $AE = BF$ ، واضح است که $AF = BE$ ، داریم:



$$\left. \begin{aligned} \triangle AFC : \frac{AE}{AF} &= \frac{x}{\lambda} \\ \triangle BED : \frac{BF}{BE} &= \frac{\lambda}{x + 30} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\substack{AE=BF \\ AF=BE}} \frac{x}{\lambda} = \frac{\lambda}{x + 30}$$

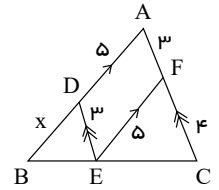
$$\Rightarrow x^2 + 30x - 64 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 32)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -32 & \text{غ ق} \\ x = 2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۱۴ - گزینه ۱ چهارضلعی $ADEF$ متوازی الاضلاع است پس $AD = EF = ۵$ و $DE = AF = ۳$

$$DE \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۳+۴} = \frac{x}{x+۵} \\ \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{x}{۵} \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۴}$$



۱۵ - گزینه ۲ ابتدا باید توجه داشت که نسبت $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ در مثلث $\triangle ABC$ برقرار است، بنابراین $DE \parallel BC$

$$\frac{۳}{۲} = \frac{۴,۵}{۳}$$

حال با استفاده از فیثاغورث داریم:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \rightarrow ۵^2 + BC^2 = ۷,۵^2 \rightarrow BC^2 = \left(\frac{۱۵}{۲}\right)^2 - ۵^2 = \frac{۱۲۵}{۴}$$

$$BC = \sqrt{\frac{۱۲۵}{۴}} = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{DE}{\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}} \rightarrow$$

طبق قضیه‌ی تالس می‌توان نوشت:

$$DE = \frac{\frac{۵\sqrt{۵}}{۲} \times ۳}{۵} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

روش دوم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{۴,۵}{۳} \rightarrow DE \parallel BC \rightarrow \hat{D} = \hat{B} = \text{deg } ۹۰$$

$$\rightarrow \text{رابطه فیثاغورث} : AD^2 + DE^2 = AE^2 \rightarrow ۳^2 + DE^2 = ۴,۵^2$$

$$\rightarrow DE^2 = \left(\frac{۹}{۲}\right)^2 - ۳^2 \rightarrow DE^2 = \frac{۸۱}{۴} - \frac{۳۶}{۴} \rightarrow DE^2 = \frac{۴۵}{۴}$$

$$\rightarrow DE = \frac{\sqrt{۴۵}}{۲} = \frac{\sqrt{۹ \times ۵}}{۲} \rightarrow \boxed{DE = \frac{۳\sqrt{۵}}{۲}}$$

۱۶ - گزینه ۳ فرض کنیم $\hat{FCE} = \hat{ECA} = \alpha$ در این صورت:

$$EF \parallel AC \Rightarrow \hat{FEC} = \hat{ACE} \Rightarrow \hat{FEC} = \alpha$$

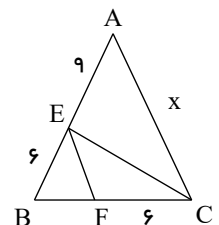
در نتیجه، مثلث EFC متساوی الساقین است ($\hat{FEC} = \hat{FCE} = \alpha$) بنابراین $EF = FC = ۶$

حال:

$$\triangle ABC : EF \parallel AC \xrightarrow{\text{نتیجه‌ی قضیه‌ی تالس}} \frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB}$$

$$\xrightarrow{AB=AC} BE = EF = ۶$$

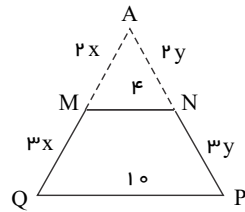
$$AC = AB = AE + BE = ۹ + ۶ = ۱۵ \Rightarrow x = ۱۵$$



۱۷ - گزینه ۳ برای محاسبه‌ی محیط مثلث AMN ابتدا با استفاده از قضیه‌ی تالس مقدار مجهول x و y را محاسبه می‌نماییم.

باید توجه داشت که پاره خط MN موازی QP است، چون نسبت $\frac{MN}{QP} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$ است، پس نسبت $\frac{AM}{AQ} = \frac{AN}{AP}$ نیز باید ۲ به ۵ باشد.

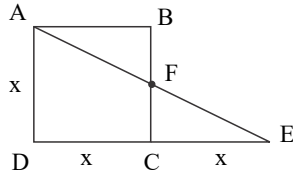
از طرفی محیط دوزنقه برابر با ۲۳ است، بنابراین:



$$3x + 3y + 4 + 10 = 23 \Rightarrow 3(x + y) = 23 - 14 \Rightarrow 3(x + y) = 9 \Rightarrow x + y = 3$$

$$AMN \text{ محیط مثلث} = 4 + 2x + 2y = 4 + 2(x + y) = 4 + 2 \times 3 = 10$$

۱۸ - گزینه ۳ ابتدا یک تصویر کلی از مسئله رسم می‌نماییم. با توجه به شکل در مثلث ADE داریم:



$$AD \parallel CF \rightarrow \frac{CF}{AD} = \frac{CE}{DE} \rightarrow \frac{CF}{x} = \frac{x}{2x} \rightarrow CF = \frac{x}{2}$$

حال می‌توان مساحت دوزنقه را به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{(\frac{x}{2} + x)x}{2} = \frac{(\frac{3x}{2})x}{2} = \frac{(\frac{3x^2}{2})}{2} = \frac{3x^2}{4}$$

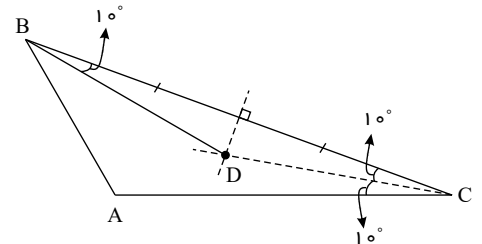
نسبت مساحت دوزنقه به مربع برابر است:

$$\frac{\frac{3x^2}{4}}{x^2} = \frac{3}{4}$$

۱۹ - گزینه ۲ با توجه به فرض مسئله داریم: $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ \rightarrow \hat{C} = 20^\circ$

حال از آنجایی که نقطه D روی نیمساز زاویه C و عمود منصف BC قرار دارد، پس:

$$\begin{cases} \hat{BCD} = \hat{ACD} = 10^\circ \rightarrow \hat{DBC} = 10^\circ \rightarrow \hat{ABD} = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ \\ BD = CD \end{cases}$$



در نتیجه:

$$\frac{\hat{DBC}}{\hat{ABD}} = \frac{10^\circ}{30^\circ} = \frac{1}{3}$$

۲۰ - گزینه ۳

$$\left. \begin{aligned} AM \parallel DN &\xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MN} \\ AM \parallel EN &\xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AB}{AD} \times \frac{AE}{AC} = \frac{BM}{MN} \times \frac{MN}{MC} = 1 \Rightarrow AB \times AE = AD \times AC$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}} \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$$

۲۱ - گزینه ۲ در مثلث $\triangle OMB$ پاره خطهای NA و MB موازی هستند، طبق تالس پس داریم:

$$\frac{ON}{OM} = \frac{OA}{OB} \quad (I)$$

در مثلث $\triangle OMC$ پاره خطهای NB و MC موازی هستند، طبق تالس داریم:

$$\frac{ON}{OM} = \frac{OB}{OC} \quad (II)$$

طبق رابطه‌ی (I) و (II) داریم:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} \rightarrow \frac{2x - 8}{x} = \frac{x}{x + 3} \rightarrow (2x - 8)(x + 3) = x^2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = x^2 \rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0 \rightarrow (x - 6)(x + 4) = 0 = \begin{cases} x = -4 & \text{غیر قابل قبول} \\ x = 6 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

بنابراین طول اضلاع به شکل زیر است:

$$\begin{cases} OA = 2x - 8 = 2(6) - 8 = 4 \\ OB = x = 6 \\ OC = x + 3 = 6 + 3 = 9 \end{cases}$$

با توجه به شکل داریم:

$$AB = OB - OA = 6 - 4 = 2$$