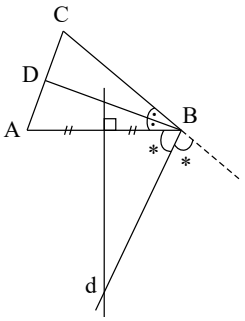
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

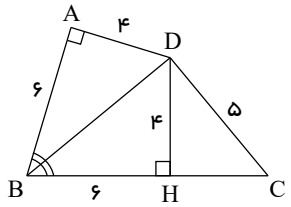


نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، روی عمود منصف AB واقع‌اند.

همچنین نقاطی که از دو ضلع AB و BC و یا امتداد آنها به یک فاصله‌اند روی نیمساز داخلی یا خارجی زاویه‌ی B واقع‌اند.

محل تلاقی عمودمنصف AB و نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی B همواره دو نقطه است.

۲ - گزینه ۳ از D بر BC عمود می‌کنیم. چون D روی نیم‌ساز زاویه‌ی ABC قرار دارد. پس:

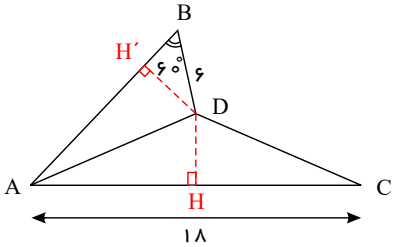


$$\begin{cases} DH = AD = ۴ \\ BH = AB = ۶ \end{cases}$$

در مثلث قائم‌الزاویه DHC بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$HC = \sqrt{۵^۲ - ۴^۲} = ۳ \Rightarrow BC = BH + HC = ۶ + ۳ = ۹$$

۳ - گزینه ۳



ارتفاع دو مثلث $\overset{\Delta}{ADB}$، $\overset{\Delta}{ADC}$ را رسم می‌نماییم.

با توجه به تصویر در مثلث $\overset{\Delta}{ADB}$ داریم:

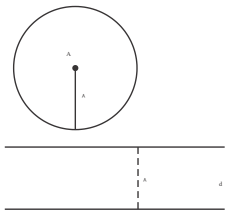
$$\sin ۶۰^\circ = \frac{DH'}{DB} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{DH'}{۶} \to DH' = ۳\sqrt{۳}$$

نقطهٔ D روی نیمساز قرار دارد پس از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، یعنی:

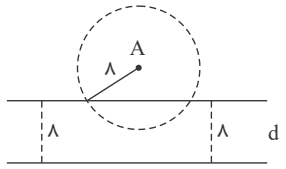
$$DH' = DH = ۳\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ADC}} = \frac{۱}{۲} DH \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۳\sqrt{۳} \times ۱۸ = ۲۷\sqrt{۳}$$

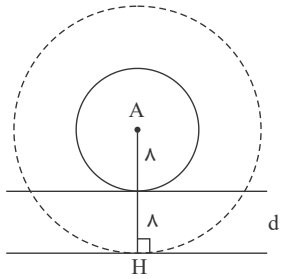
۴ - گزینه ۲ نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله‌ی ۸ واحد باشند، دو خط موازی d و به فاصله‌ی ۸ واحد از آن و نقاطی از صفحه که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۸ باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۸ قرار دارند. باتوجه به شکل زیر، حالت‌های زیر را می‌توانیم داشته باشیم:



۱) $AH > ۱۶ \Rightarrow$ صفر نقطه‌ی برخورد



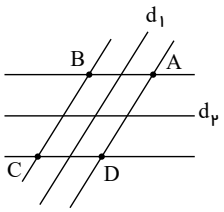
۳) $0 \leq AH < 16$ دو نقطه‌ی برخورد



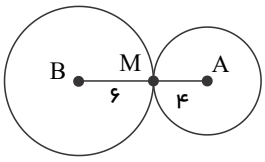
۲) $AH = 16 \Rightarrow$ یک نقطه‌ی برخورد

۵ - گزینه ۴

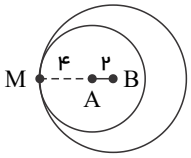
نقاطی از صفحه که از یک خط به فاصلهٔ مشخصی هستند. دو خط به موازات آن و در دو طرف خط مفروض می‌باشند. دو خط متقاطع d_1 و d_2 را در نظر می‌گیریم و دو خط به موازات هریک، به فاصلهٔ $2cm$ از آن‌ها رسم می‌کنیم. نقاط برخورد آن‌ها (نقاط A, B, C و D) جواب‌های مسأله می‌باشند.



۶ - گزینه ۲ با توجه به اینکه فقط یک نقطه (M) با ویژگی ذکر شده وجود دارد می‌توان دو حالت در نظر گرفت:



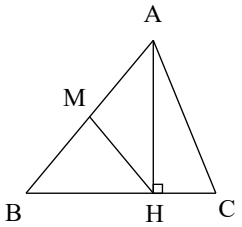
حالت اول: $\rightarrow L = BM + AM = 6 + 4 = 10$



حالت دوم: $L = BM - AM = 6 - 4 = 2$

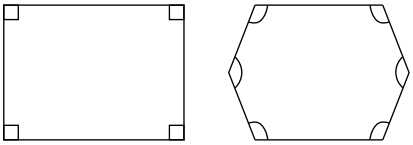
پس L دو مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد و مجموع مقادیر $10 + 2 = 12$ می‌باشد.

۷ - گزینه ۱ مثلث ABH قائم‌الزاویه است و در نتیجه MH (M وسط ضلع AB است) نصف وتر است، یعنی $MH = BM$. بنابراین نقطه‌ی M که از دو سر پاره‌خط BH به یک فاصله است. همواره بر روی عمودمنصف BH قرار دارد.



۸ - گزینه ۴ مثال‌های نقض گزینه‌ی «۱»: تمام مثلث‌های قائم الزاویه، که محل همرسی ارتفاع‌های آن‌ها روی محیط مثلث قرار دارد.

مثال‌های نقض گزینه‌ی «۲»:



مثال‌های نقض گزینه‌ی «۳»:

۱. دو مستطیل به ابعاد 4×3 و 6×2

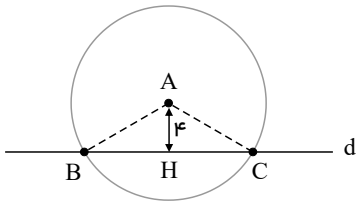
۲. دو مستطیل به ابعاد 6×4 و 8×3

تنها مثال نقض گزینه‌ی «۴»: عدد صفر است که اگر در $\sqrt{2}$ ضرب شود، گنگ نمی‌شود..

۹ - گزینه ۱ چون زاویهٔ محل تقاطع قطرهای متوازی‌الاضلاعی به طول ۶ و ۸ سانتی‌متر مشخّص نیست، بنابراین بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این اندازه قطرها می‌توان رسم نمود.در صورتی که زاویهٔ بین دو قطر معلوم می‌شد، این متوازی‌الاضلاع منحصر به فرد می‌شد.

۱۰ - گزینه ۲

ابتدا یک تصویر کلی با استفاده از اطلاعات سوال رسم می‌نماییم:



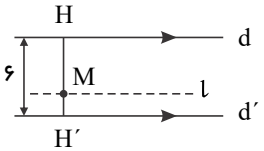
$$S_{\overset{\Delta}{AB}C} = \frac{۱}{۲}AH \times BC \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۴ \times BC = ۱۲ \to ۲BC = ۱۲ \to \boxed{BC = ۶} \to \boxed{BH = CH = ۳}$$

در این مرحله برای محاسبهٔ ضلع AB یا AC که همان شعاع دایره است، کافیست از قضیهٔ فیثاغورث استفاده نماییم.

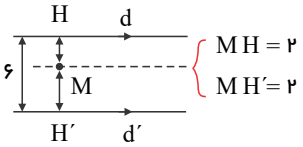
$$\overset{\Delta}{AH}C : AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ \to AC^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ \to \boxed{AC = ۵}$$

۱۱ - گزینه ۲ ابتدا دو خط موازی به فاصلهٔ ۶ واحد رسم می‌نماییم و نقطه‌ای مانند M بین دو خط در نظر می‌گیریم.

$$\begin{matrix} MH + MH' = ۶ \\ MH - MH' = ۲ \end{matrix} \to \begin{matrix} MH = ۴ \\ MH' = ۲ \end{matrix}$$

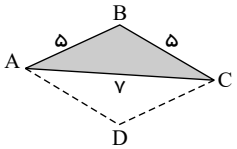


با توجه به محاسبهٔ مجموعه نقاطی که ویژگی مورد نظر را دارند خطی موازی با d و d' است که از d، ۴ واحد فاصله دارند. حال ممکن است این خط به خط d نزدیک‌تر و از d' دورتر باشد، یعنی:



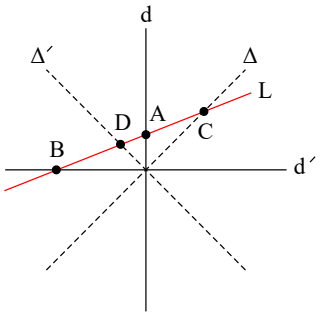
ضمناً توجه داشته باشید که اگر نقطهٔ خارج دو خط باشد، یعنی تفاضل فاصلهٔ آن از دو خط همان فاصله دو خط می‌باشد.

۱۲ - گزینه ۲ می‌دانیم که در لوزی اضلاع باهم برابرند. بنابراین ابتدا با داشتن سه ضلع ۵ و ۵ و ۷ سانتی‌متر یک مثلث می‌توان رسم کرد که اگر آن‌را نسبت به قطر داده‌شده قرینه کنیم، لوزی موردنظر رسم خواهد شد.



۱۳ - گزینه ۳

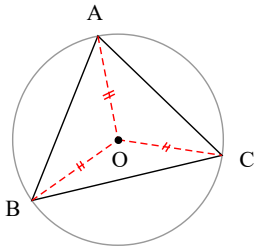
مجموعه نقاطی از صفحه که از دو خط d و d' به یک فاصله باشند، دو خط Δ و Δ' (نیم‌سازهای زوایای بین دو خط d و d') هستند که محل تلاقی آن‌ها با خط L یعنی نقاط C و D جواب مورد نظر می‌باشد. واضح است که اگر L موازی یکی از دو خط Δ و Δ' باشد، مسأله تنها یک جواب دارد. بنابراین مسأله حداکثر دو جواب دارد.



۱۴ - گزینه ۴ چون محل برخورد عمود منصف‌ها یکتاست، بنابراین نقطهٔ O محل برخورد هر سه عمود منصف است. همچنین اگر O روی عمود منصف AB باشد، $OA = OB$ است و نیز O روی عمود منصف BC است پس $OB = OC$ است و همینطور O روی عمودمنصف AC است پس خواهد بود بنابراین $OA = OB = OC = r$ می‌باشد یعنی اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع r بزنیم از سه رأس A و B و C عبور می‌کند که اصطلاحا می‌گوییم این دایره محیط بر مثلث است.

در ضمن اگر مثلث یک زاویه بیشتر از ۹۰ درجه باشد، محل برخورد عمود منصف‌ها خارج مثلث است و اگر یک زاویه ۹۰° داشته باشد محل برخورد عمود منصف‌ها روی وتر است و اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشد، محل برخورد عمود منصف‌ها داخل مثلث است.

بنابراین گزینهٔ «۳» نیز غلط است و فقط گزینهٔ «۴» صحیح می‌باشد.



۱۵ - گزینه ۲ هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. بنابراین داریم:

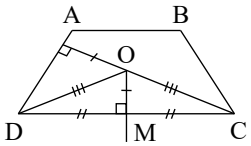
$$DH = DH' \to x^{۲} - ۵ = x + ۱ \to x^{۲} - x - ۶ = ۰$$

$$(x-۳)(x+۲) = ۰ \begin{cases} x = ۳ \quad ✓ \\ x = -۲ \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

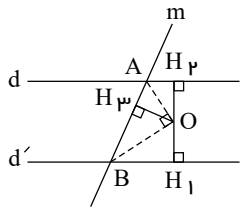
$$\begin{matrix} AC = x + ۳ = ۶ \\ AB = x + ۲ = ۵ \end{matrix} \to \frac{AC}{AB} = \frac{۶}{۵}$$

۱۶ - گزینه ۳

در ذوزنقه‌ی $ABCD$ مطابق شکل، O نقطه‌ی برخورد عمودمنصف قاعده‌ی CD و نیم‌ساز زاویه‌ی D است.



۱۷ - گزینه ۳

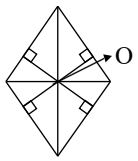


$$\left.\begin{matrix} \xrightarrow{\text{روی نیم‌ساز } \widehat{B}\ O} OH_۱ = OH_۳ \\ \xrightarrow{\text{روی نیم‌ساز } \widehat{A}\ O} OH_۲ = OH_۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow OH_۱ = OH_۲$$

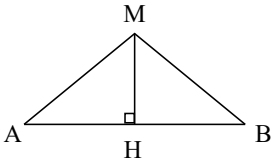
از طرفی $\widehat{A} + \widehat{B} = ۱۸۰^\circ$ است. پس زاویه‌ی حاصل از برخورد دو نیم‌ساز $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ یعنی $A\widehat{O}B$ زاویه‌ی قائمه است. نقطه‌ی O در صورتی روی عمودمنصف AB قرار دارد که خط m، دو خط d و d' را با زاویه‌ی ۹۰° قطع کند. بنابراین گزینه «۳» لزوماً درست نیست.

۱۸ - گزینه ۴

نقطه‌ای که از تمامی اضلاع یک چهارضلعی به یک فاصله باشد، در واقع نقطه‌ی همرسی نیم‌سازهای زوایای آن چهارضلعی است. در بین چهارضلعی‌های داده شده، تنها در لوزی نیم‌سازها که در واقع همان قطرهای لوزی هستند، همرس می‌باشند.

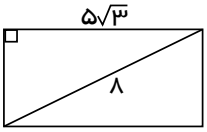


۱۹ - گزینه ۱ چون M از دو سر پاره‌خط AB به یک اندازه است، پس M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. یعنی $AH = ۱۳cm$ و $A\widehat{H}M = ۹۰^\circ$ طبق رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث AMH داریم:



$$MH^{۲} = MA^{۲} - AH^{۲}$$
$$\Rightarrow MH^{۲} = ۱۵^{۲} - ۱۳^{۲} = ۲۲۵ - ۱۶۹ = ۵۶$$
$$\Rightarrow MH = \sqrt{۵۶} = \sqrt{۴ \times ۱۴} = ۲\sqrt{۱۴}$$

۲۰ - گزینه ۴ ابتدا شکل فرضی مسأله را رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطر مستطیل، وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که روی دو ضلع مجاور ساخته می‌شود و باید از هر دو ضلع بزرگ‌تر باشد.

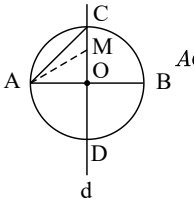


از طرفی داریم:

$$۵\sqrt{۳} = \sqrt{۵^{۲} \times ۳} = \sqrt{۷۵} > ۸ \to \text{وتر} > \text{ضلع قائم}$$

بنابراین چنین مستطیلی وجود ندارد.

۲۱ - گزینه ۳ چون نقطه‌ی M از A و B به یک فاصله است، پس بر روی عمودمنصف پاره‌خط AB یعنی خط d قرار دارد. باتوجه به آن که شعاع دایره برابر ۵ است، داریم:



$$AC=\sqrt{OA^{۲}+OC^{۲}}=\sqrt{۵^{۲}+۵^{۲}}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

چون $۶<۵\sqrt{۲}$ ، پس فاصله‌ی نقطه‌ی M از نقطه‌ی A، کم‌تر از فاصله‌ی نقطه‌ی C از نقطه‌ی A است، بنابراین نقطه‌ی M روی خط d و درون دایره واقع است.

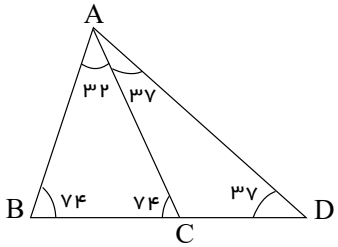
۲۲ - گزینه ۳ چون $OA=OC$ است پس O از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است. یعنی O روی عمودمنصف AC واقع است.

۲۳ - گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} AD=DC \\ AE=CF \\ \text{مشترک}\ \hat{D}=\hat{D}=۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ADE}\cong \overset{\Delta}{DFC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F\hat{C}D=D\hat{A}E=۱۵^\circ \Rightarrow D\hat{F}C=۷۵^\circ \\ DF=DE\Rightarrow D\hat{F}E=D\hat{E}F=۴۵^\circ \end{array}\right.$$

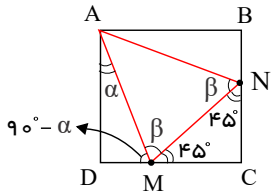
$$C\hat{F}E=D\hat{F}C-D\hat{F}E=۷۵^\circ-۴۵^\circ=۳۰^\circ$$

۲۴ - گزینه ۳



$$\left.\begin{array}{l} A\widehat{C}B=\dfrac{۱۸۰^\circ-۳۲^\circ}{۲}=۷۴^\circ \\ \text{زاویه خارجی مثلث}\ A\widehat{C}D\ \text{زاویه خارجی مثلث}\ A\widehat{C}B \end{array}\right\} A\widehat{D}C=\frac{A\hat{C}B}{۲}\Rightarrow ADC=\frac{۷۴^\circ}{۲}=۳۷^\circ$$

۲۵ - گزینه ۳



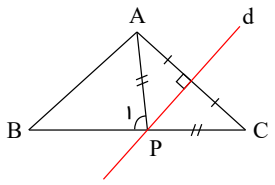
$$\overset{\Delta}{ABN}\cong\overset{\Delta}{ADM}\ \text{(ض ز ض)}\rightarrow AM=AN\Rightarrow A\widehat{M}N=\beta$$

قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{MNC}$ $CN=CM\Rightarrow$ از طرفی

$$\Rightarrow N\widehat{M}C=۴۵^\circ$$

$$A\widehat{M}D+A\widehat{M}N+N\widehat{M}C=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۹۰^\circ-\alpha+\beta+۴۵^\circ=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha=\beta-۴۵^\circ$$

۲۶ - گزینه ۲



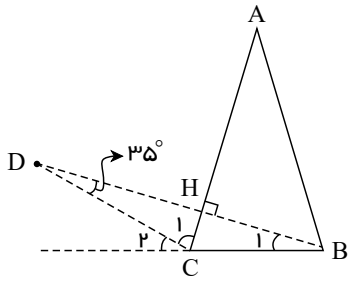
$$AB=AC\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲}\Rightarrow \hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-۱۱۲^\circ}{۲}=۳۴^\circ$$

اگر d عمود منصف AC باشد:

$$P\in d\Rightarrow AP=CP\Rightarrow C\hat{A}P=\hat{C}$$

زاویه ی خارجی: $\hat{P}_۱=C\hat{A}P+\hat{C}=۲\hat{C}=۲\times ۳۴^\circ=۶۸^\circ$

۲۷ - گزینه ۳



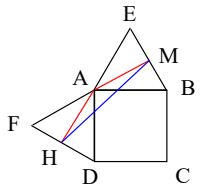
$$\text{در مثلث}\ \overset{\Delta}{CHD}:\left\{\begin{array}{l}\hat{D}=۳۵^\circ \\ \hat{H}=۹۰^\circ\end{array}\right.\Rightarrow \hat{C}_۱=۵۵^\circ$$

از طرفی چون CD نیم‌ساز زاویه‌ی خارجی مثلث است، بنابراین $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$ و در نتیجه:

زاویه‌ی خارجی مثلث ACB: $\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۱۰^\circ$

$\Rightarrow$ زاویه‌ی داخلی: $\hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ\Rightarrow \hat{B}=۷۰^\circ\Rightarrow \hat{A}=۴۰^\circ$

۲۸ - گزینه ۲ مثلث‌های AEB و AFD با هم همنهشتند و میانه و ارتفاع با هم برابرند. $AM=AH$ (چون مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع هستند.)

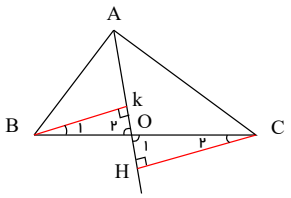


$$\left.\begin{array}{l} H\hat{A}D = ۳۰^\circ \\ B\hat{A}M = ۳۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow H\hat{A}M = ۹۰^\circ + ۲ \times ۳۰^\circ = ۱۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{M}H = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ(۱) \ , \ A\hat{M}E = ۹۰^\circ(۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} H\hat{M}E = ۱۰۵^\circ$$

۲۹ - گزینه ۱ طبق فرض $BK = CH$ می‌باشد. از طرفی $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ متقابل به رأس هستند.

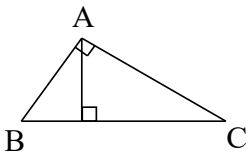


$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{K} = \hat{H} = ۹۰^\circ \end{array}\right. \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{B}_۱$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{C}_۱ = \hat{B}_۱ \\ CH = BK \\ \hat{H} = \hat{K} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\Delta}{K}O \cong O\overset{\Delta}{H}C \ (\text{ز ض ز}) \Rightarrow BO = OC \Rightarrow$$ AO میانه‌ی ضلع BC است.

نکته: اگر در مثلثی میانه و نیمساز وارد بر یک ضلع بر هم منطبق باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.

۳۰ - گزینه ۲ طبق مفروضات صورت سؤال داریم:

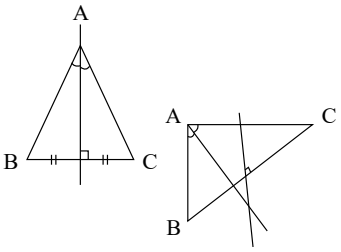


$$\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} \xrightarrow{+\widehat{A}} ۲\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{A}$$

$$\Rightarrow ۲\widehat{A} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۹۰^\circ$$

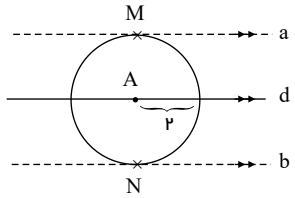
می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، محل تلاقی ارتفاع‌ها روی رأس قائمه است، پس این نقطه روی محیط مثلث است.

۳۱ - گزینه ۴ اگر $AB = AC$، هر نقطه‌ای روی عمودمنصف BC (نیمساز $B\hat{A}C$) از B و C به یک فاصله و از AB و AC به فاصلهٔ یکسان قرار دارد و مسأله بی‌شمار جواب دارد.



اگر $AC = BC \neq AB$، نیمساز $B\hat{A}C$ و عمودمنصف BC همواره در یک نقطه متقاطع‌اند و مسأله یک جواب دارد.

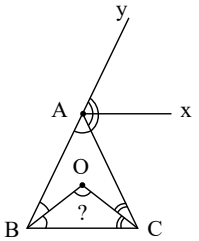
۳۲ - گزینه ۳



مجموعه نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آنها از خط مفروض d برابر با ۲ واحد باشد دو خط موازی در دو طرف خط d است که آنها را خط‌های a و b می‌نامیم و همچنین مجموعهٔ نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ مفروض A به اندازهٔ ۲ واحد باشد، نقاط روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ واحد است. بنابراین محل برخورد خطوط a و b با دایرهٔ رسم شده جواب‌های مسئله هستند.

۳۳ - گزینه ۳

با توجه به تصویر می‌توان گفت: Ax نیمساز زاویهٔ $C\hat{A}y$ پس داریم:



$$y\hat{A}x = C\hat{A}x$$

از طرفی $C\hat{A}y$ زاویه خارجی مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ می‌باشد و برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور است.

$$\hat{B} + \hat{C} = C\hat{A}y = ۲x\hat{A}C \ (I)$$

از طرفی Ax و BC موازی و خط AC مورب است پس داریم:

$$\hat{C} = C\hat{A}x \ (II)$$

$$(I),(II) \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۲\hat{C} \rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۷۵^\circ$$

$$O\overset{\Delta}{B}C : \hat{O} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

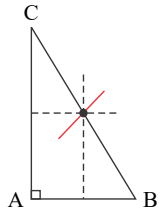
$$\rightarrow \hat{\theta} = ۱۸۰^\circ - \underbrace{(\frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲})}_{\hat{B}} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}) = ۱۸۰^\circ - ۷۵^\circ = ۱۰۵^\circ$$

۳۴ - گزینه ۴ با توجه به اطلاعات سوال ابتدا وضعیت زوایا و نوع مثلث را بررسی نماییم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}\end{array}\right\} ۲\hat{A} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

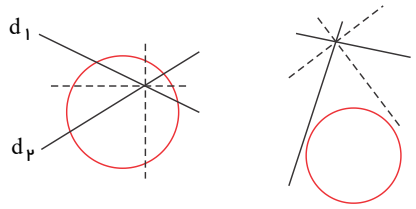
پس یک مثلث قائم‌الزاویه داریم:

عمودمنصف‌های مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر قرار می‌گیرند که همان بزرگ‌ترین ضلع مثلث می‌باشد.

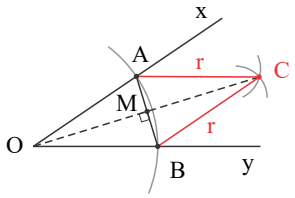


۳۵ - گزینه ۳ هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. حال اگر هر خط متقاطع با دایره برخورد داشته باشد نیمسازهای چهار زاویه تشکیل شده، با دایره حداکثر در چهار نقطه تقاطع دارند.

باید توجه داشت که ممکن است دو خط با دایره متقاطع نباشند.

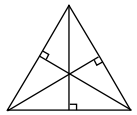


۳۶ - گزینه ۲ با توجه به گزینه‌ها، در مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ الزاماً متساوی‌الاضلاع نمی‌باشد ولی سایر گزینه‌ها صحیح است.

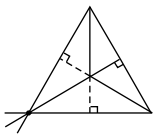


۳۷ - گزینه ۱

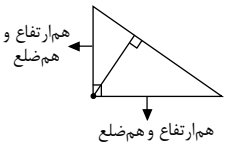
محل همرسی ارتفاع‌های مثلث در مثلثی که سه زاویهٔ تند دارد داخل مثلث است.



محل همرسی ارتفاع‌های مثلث با یک زاویه منفرجه خارج مثلث قرار دارد.



ولی محل برخورد ارتفاع‌ها در مثلث قائم‌الزاویه روی رأس قائمه قرار دارد.



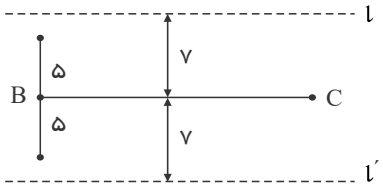
۳۸ - گزینه ۱ با توجه به اطلاعات مسئله یعنی مساحت و طول ضلع می‌توان ارتفاع وارد بر بعضی اضلاع را محاسبه نمود:

$$S = \frac{۱}{۲}BC \times h_{BC} \rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲} \times ۶ \times h_{BC} = ۲۱ \rightarrow h_{BC} = ۷$$

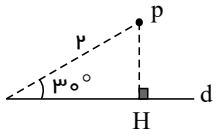
حال می‌توان گفت رأس در ۷ واحدی از ضلع BC قرار دارد، یعنی رأس A یا روی خط ℓ قرار می‌گیرد یا ℓ'.

حال به مرکز B و شعاع ۵ واحد دایره رسم می‌نماییم تا خط ℓ یا ℓ' قطع نماید، زیرا ضلع AB برابر ۵ واحد است. دایرهٔ مرسوم هیچ برخوردی با ℓ یا ℓ' ندارد؛ بنابراین هیچ مثلثی قابل رسم نمی‌باشد.

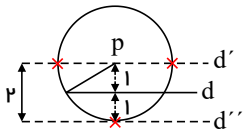


۳۹ - گزینه ۳ از آنجا که $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{PH}{۲} \Rightarrow PH = ۲(\frac{۱}{۲}) = ۱$$



تمام نقاطی که از نقطهٔ P به فاصلهٔ ۲ هستند، روی دایره‌ای به مرکز P و به شعاع ۲ قرار دارد. تمام نقاطی که از نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۱ می‌باشند دو خط موازی خط d و به فاصلهٔ ۱ از آن هستند. پس:



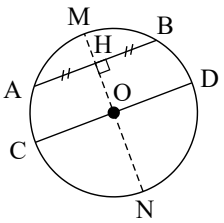
مطابق شکل، سه نقطه وجود دارد.

۴۰ - گزینه ۴ اگر نقطه A از دو ضلع زاویه xOy به یک فاصله باشد، روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد. یعنی باید $x\widehat{O}A = y\widehat{O}A$

در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳». دو مثلث MOA و $M'OA$ هم‌نهشت هستند. پس $M\widehat{O}A = M'\widehat{O}A$ ولی در گزینه «۴»، دو مثلث MOA و $M'OA$ لزوماً هم‌نهشت نیستند، پس نمی‌توان نتیجه گرفت که دو زاویه‌ی مورد نظر برابرند.

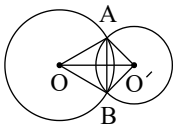
۴۱ - گزینه ۴

نقاط تقاطع عمودمنصف هر وتر دلخواه با محیط دایره، دو سر یک قطر از دایره است. (نقاط M و N)حال اگر عمودمنصف این قطر را رسم کنیم، باز هم قطری از دایره و عمود بر قطر قبلی به دست می‌آید(قطر CD) و چون دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند، بنابراین قطر جدید موازی با وتر AB است. ($AB||CD$)



۴۲ - گزینه ۴

$$\begin{cases} OA = OB = R \Rightarrow AB \text{ روی عمودمنصف } O \\ O'A = O'B = R' \Rightarrow AB \text{ روی عمودمنصف } O' \end{cases} \Rightarrow AB \text{ عمودمنصف } OO'$$

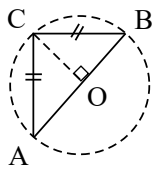


$$\begin{cases} OA = OB = R \\ O'A = O'B = R' \\ OO' \text{ مشترک} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{OAO'} \cong \overset{\Delta}{OBO'} \Rightarrow O\widehat{A}O' = O\widehat{B}O'$$

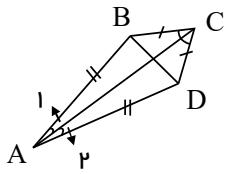
۴۳ - گزینه ۴ چون نقطه‌ی C روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس $BC = AC$ است. از طرفی داریم:

$$\overset{\Delta}{BOC} : \begin{cases} OB = OC = R \\ \widehat{O} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow B\widehat{C}O = \widehat{B} = ۴۵^\circ$$

به همین ترتیب $\widehat{A} = ۴۵^\circ$ بنابراین $\widehat{C} = ۹۰^\circ$ است. پس $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.



۴۴ - گزینه ۲



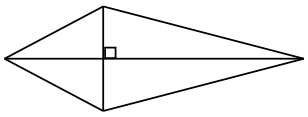
$$\begin{cases} AB = AD \\ BC = CD \xrightarrow{(\text{ض،ض،ض})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \\ AC \text{ مشترک} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ \end{cases} \Rightarrow \hat{C}\,,\ \hat{A} \text{ نیم‌ساز زوایای } AC$$

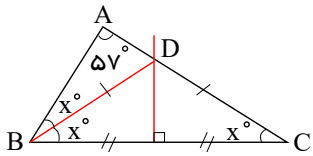
$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \Rightarrow BC \text{ روی عمود منصف } A \\ CB = CD \Rightarrow BC \text{ روی عمود منصف } C \end{array}\right\} \Rightarrow BD \text{ عمود منصف } AC$$

بنابراین ۲ مورد صحیح است. موارد «الف» و «پ» صحیح هستند.

۴۵ - گزینه ۳ در شکل زیر قطر ها عمود هستند ولی چهار ضلعی لوزی نیست. (مثال نقض)



۴۶ - گزینه ۴ مطابق شکل، عمود منصف ضلع BC و نیم‌ساز زاویه‌ی B یکدیگر را روی ضلع AC در نقطه‌ی D قطع کرده‌اند، داریم:

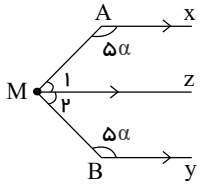


$$\overset{\Delta}{BDC} \text{ زاویه خارجی است : } A\hat{D}B \Rightarrow A\hat{D}B = x + x = ۲x$$

$$\overset{\Delta}{ADB} : ۲x + x + ۵۷^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + ۱۹^\circ = ۶۰^\circ \Rightarrow x = ۴۱^\circ$$

$$\hat{B} = ۲x = ۸۲^\circ$$

۴۷ - گزینه ۳ مطابق شکل از M، نیم خط Mz را موازی با نیم خط‌های Ax و By رسم می‌کنیم. داریم:



$$\begin{cases} Mz \parallel Ax \Rightarrow \hat{M}_۱ + ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \\ Mz \parallel By \Rightarrow \hat{M}_۲ + ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow (\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲) + ۱۰\alpha = ۳۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ} ۱۰\alpha = ۲۷۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۷^\circ$$

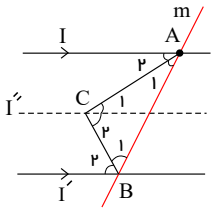
در چهار ضلعی $AMBN$، مجموع زوایای داخلی ۳۶۰ درجه است. پس:

$$۴\alpha + ۹۰^\circ + ۳\alpha + \hat{N} = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{\alpha = ۲۷^\circ} ۱۰۸^\circ + ۹۰^\circ + ۸۱^\circ + \hat{N} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{N} = ۸۱^\circ$$

۴۸ - گزینه ۲ از رأس C خطی به موازات I و I' رسم می کنیم ، داریم:

$$I \parallel I'' , AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۱$$

$$I' \parallel I'' , BC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{C}_۲$$



$$\hat{A}_۲ + \hat{B}_۲ = \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_۲ + \hat{B}_۲ \xrightarrow{\text{فرض}} \hat{C} = \frac{۱}{n}\hat{A}_۱ + \frac{۱}{n}\hat{B}_۱$$

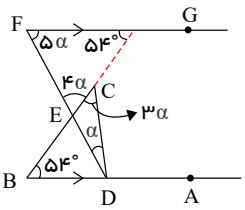
$$\Rightarrow \hat{C} = \frac{۱}{n}(\hat{A}_۱ + \hat{B}_۱) \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ = n\hat{C} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{(۱)} n\hat{C} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow (n+۱)\hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow n + ۱ = \frac{۱۸۰^\circ}{\hat{C}}$$

$$\xlongequal{\text{فرض}} \frac{۱۸۰^\circ}{۷۲^\circ} = ۲/۵ \Rightarrow n = ۲/۵ - ۱ \Rightarrow n = ۱/۵$$

۴۹ - گزینه ۲



$$\overset{\Delta}{CED} : \hat{E}_{\text{خارجی}} = \hat{C} + \hat{D} = ۳\alpha + \alpha = ۴\alpha$$

$$۵\alpha + ۴\alpha + ۵۴^\circ = ۱۸۰^\circ$$

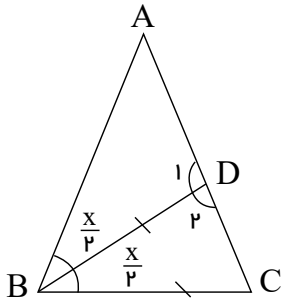
$$\Rightarrow ۹\alpha = ۱۸۰^\circ - ۵۴^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۴^\circ$$

$$B\hat{E}F = ۱۸۰^\circ - ۴\alpha = ۱۸۰^\circ - ۵۶^\circ = ۱۲۴^\circ$$

۵۰ - گزینه ۲ اندازه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را x فرض می‌کنیم.

$BD = BC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{D}_۲ \Rightarrow \widehat{D}_۲ = x$

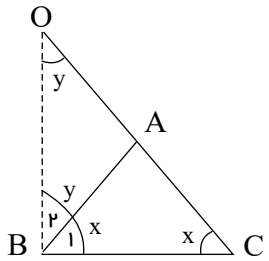
در مثلث BCD داریم:



$$\frac{\widehat{B}}{۲} + \widehat{C} + \widehat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{x}{۲} + x + x = ۱۸۰^\circ$$

$$x = ۷۲^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = ۷۲^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۳۶^\circ$$

۵۱ - گزینه ۱

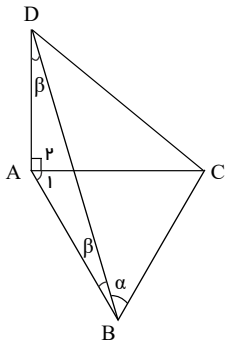


$$AB = AC \Rightarrow \widehat{B}_۱ = \widehat{C} = x$$

$$AO = AB \Rightarrow \widehat{O} = \widehat{B}_۲ = y$$

$$\widehat{O} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow y + (x+y) + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲y + ۲x = ۱۸۰ \Rightarrow x + y = ۹۰^\circ$$

۵۲ - گزینه ۴



$$\left.\begin{array}{l} A\overset{\Delta}{D}C : AD = AC \\ A\overset{\Delta}{B}C : AB = AC \end{array}\right\} \Rightarrow AD = AB$$

پس مثلث $A\overset{\Delta}{B}D$ متساوی‌الساقین است. زاویه‌های مساوی در این مثلث را β نامیده‌ایم.

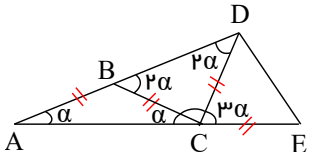
$$A\overset{\Delta}{B}D : \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + ۲\beta = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶۰^\circ + ۹۰^\circ + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta = ۱۵^\circ$$

$$A\hat{B}C = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۶۰^\circ \xrightarrow{\beta = ۱۵^\circ} \alpha = ۴۵^\circ$$

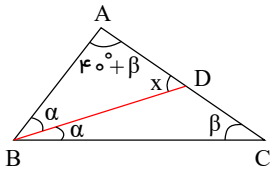
۵۳ - گزینه ۳

اگر $\hat{A} = \alpha$ در نظر بگیریم، مقادیر بقیه‌ی زوایا مطابق شکل بر حسب α به‌دست می‌آیند.



$$C\overset{\Delta}{D}E : \begin{cases} \hat{D} = \hat{E} = ۵۴^\circ \\ \hat{C} = ۳\alpha \end{cases} \Rightarrow ۳\alpha = ۱۸۰^\circ - ۲(۵۴^\circ) \Rightarrow ۳\alpha = ۷۲^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۴^\circ$$

۵۴ - گزینه ۴ مطابق شکل داریم:

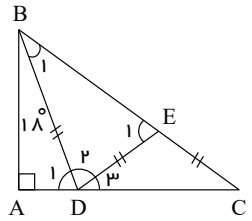


زاویه خارجی : $x = \alpha + \beta$

$$A\overset{\Delta}{B}D : ۴۰^\circ + x + \underbrace{\beta + \alpha}_{x} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲x + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x = ۱۴۰^\circ \Rightarrow x = ۷۰^\circ$$

۵۵ - گزینه ۳



$$\overset{\Delta}{ABD}: \hat{D}_1 = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$$

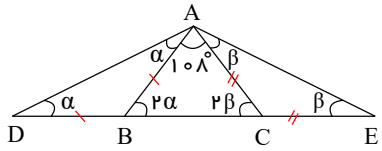
$$\hat{E}_1 = 2\hat{C} \text{ (زاویه‌ی خارجی در مثلث } ECD\text{)}$$

$$\overset{\Delta}{BDE}: \hat{D}_2 = 180^\circ - 2\hat{E}_1 = 180^\circ - 4\hat{C}$$

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \hat{D}_3 = 180^\circ \Rightarrow 72^\circ + 180^\circ - 4\hat{C} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3\hat{C} = 72^\circ \Rightarrow \hat{C} = 24^\circ$$

۵۶ - گزینه ۳ مطابق شکل، زاویه‌های ABC و ACB به ترتیب برای مثلث‌های ABD و ACE زاویه‌ی خارجی هستند و داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: 108^\circ + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 36^\circ$$

$$D\hat{A}E = 108^\circ + (\alpha + \beta) = 108^\circ + 36 = 144^\circ$$

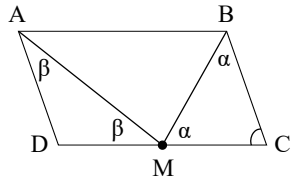
زاویه‌ی $D\hat{A}E$ بزرگ‌ترین زاویه در مثلث ADE است، پس زاویه‌ی خارجی آن، کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی خواهد بود که مقدار آن برابر است با:

$$180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$

۵۷ - گزینه ۳

$$\hat{D} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=30^\circ} \hat{D} = 150^\circ$$

چون M وسط DC است، لذا داریم:



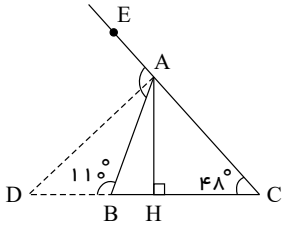
$$\overset{\Delta}{BCM}: BC = CM \Rightarrow 30^\circ + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 75^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ADM}: AD = DM \Rightarrow 150^\circ + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 15^\circ$$

در نتیجه داریم:

$$A\hat{M}B = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

۵۸ - گزینه ۳



$$A\hat{B}C = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ \Rightarrow B\hat{A}H = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

$$B\hat{A}C = 180^\circ - (48 + 70)^\circ = 62^\circ \Rightarrow B\hat{A}E = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$$

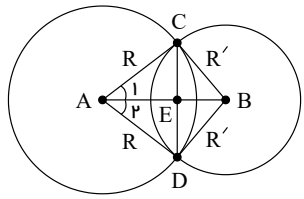
$$\Rightarrow B\hat{A}D = \frac{118^\circ}{2} = 59^\circ$$

$$D\hat{A}H = B\hat{A}D + B\hat{A}H = 20^\circ + 59^\circ = 79^\circ$$

۵۹ - گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{r} AB = BM \Rightarrow B\hat{A}M = A\hat{M}B \Rightarrow N\hat{A}B = A\hat{M}C \\ AB = BM, BM = MC \Rightarrow AB = MC \\ \text{فرض} AN = AM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABN} \cong \overset{\Delta}{AMC} \to BN = AC$$

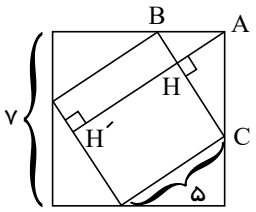
۶۰ - گزینه ۱ برای دو مثلث ABC و ABD داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AC = AD = R \\ BC = BD = R' \\ AB = AB \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \overset{\text{ض ض ض}}{\cong} \overset{\Delta}{ABD} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

بنابراین در مثلث متساوی‌الساقین ACD، پاره‌خط AE نیمساز است و در نتیجه AE عمود منصف CD می‌باشد. از آن جا که BE هم‌راستا با AE است، پس AB ، عمود منصف CD است و هر نقطه مانند M روی این پاره‌خط از C و D به یک فاصله است یعنی همواره $MC = MD$.

۶۱ - گزینه ۳



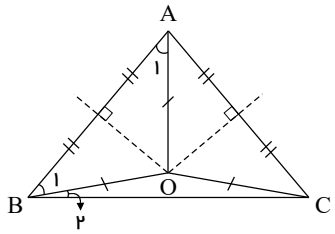
مساحت بین دو مربع $= ۷^۲ - ۵^۲ = ۲۴$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۴} \times ۲۴ = ۶$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AH \times BC \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times AH \times ۵ = ۶ \Rightarrow AH = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

فاصله‌ی راس A از دورترین ضلع مربع کوچک : $AH + HH' = ۲/۴ + ۵ = ۷/۴$

۶۲ - گزینه ۱ اگر از O به A وصل کنیم به علت آن‌که O روی عمود منصف AB واقع است $OA = OB$ و از آن‌جا که O روی عمود منصف AC واقع است، $OA = OC$، پس $OB = OC$ و مثلث‌های OAB، OAC و OBC متساوی‌الساقین هستند، داریم:



$$O\overset{\Delta}{A}B : \hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ = \frac{\hat{A}}{۲} = ۴۰^\circ$$

$$A\overset{\Delta}{B}C : A\hat{B}C = \frac{۱۸۰^\circ - B\hat{A}C}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۲ = A\hat{B}C - \hat{B}_۱ = ۵۰^\circ - ۴۰^\circ = ۱۰^\circ$$

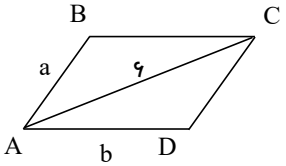
۶۳ - گزینه ۴ در مثلث ABC زوایای B و C مساوی‌اند پس مکمل‌های آن‌ها با هم برابرند. پس دو مثلث ABE و BCD همنهشت‌اند.

$$\Rightarrow B\hat{E}A = C\hat{B}D, AE = BD\,,\ \hat{D} = E\hat{A}B$$

زاویه‌ی خارجی در مثلث ABE $= A\hat{B}C = \hat{E} + E\hat{A}B = \hat{E} + \hat{D}$

۶۴ - گزینه ۲ می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو با یکدیگر برابرند. بنابراین $BC = AD = b$.

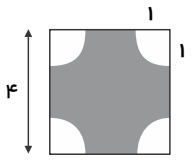
با روش مندرج در متن سؤال فقط زمانی یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید که کمان‌های رسم شده به شعاع‌های a و b به مراکز A و C یکدیگر را قطع کنند. به بیانی دیگر مثلث ABC با اضلاع ۶ و a و b قابل رسم باشد، پس لازم است که $a + b > ۶$، $a + ۶ > b$ و $b + ۶ > a$ باشد، بنابراین گزینه (۲) صحیح است.



۶۵ - گزینه ۱ ابتدا یک مربع به طول ضلع ۴ واحد رسم می‌نماییم. از هر چهار رأس دایره‌ای به شعاع یک رسم می‌نماییم تا به صورت زیر تبدیل شود.

با توجه به وجود چهار ربع دایره می‌توان مساحت یک دایرهٔ کامل را محاسبه نمود.

مساحت بخش هاشورخورده برابر است با:



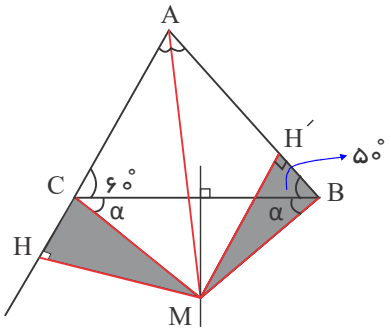
هاشورخورده $S = S_{\text{مربع}} - S_{\text{دایره}} = ۱۶ - \pi(۱)^۲ = ۱۶ - \pi$

۶۶ - گزینه ۳

برای حل این تست بهتر است ابتدا به تعریف‌های عمود منصف و نیمساز اشاره کنیم.

۱) عمود منصف هر پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان از دو سر پاره‌خط یکسان باشد.

۲) نیم ساز هر زاویه ، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان از دو ضلع زاویه یکسان باشد.



از نقطه‌ی M محل تلاقی عمود منصف ضلع BC و نیمساز $\hat{A}$ به B و C وصل می‌کنیم، پس طبق $MC = MB(۲)$ همچنین از M دو عمود MH و MH' را بر اضلاع AC و AB رسم می کنیم، پس طبق $MH = MH'$،(۱) در نتیجه، مثلث‌های قائم‌الزاویه MBH' و MCH به حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند. پس $\widehat{HCM} = \widehat{MBH'} = ۵۰^\circ + \alpha$

$$\widehat{HCM} + \widehat{MCA} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow (۵۰^\circ + \alpha) + (۶۰^\circ + \alpha) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۵^\circ$$

۶۷ - گزینه ۱

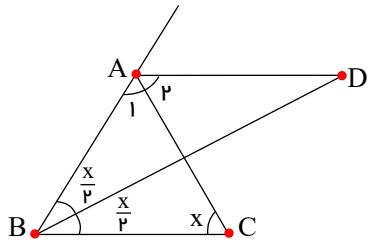
$\widehat{B} = \widehat{C}$ را x فرض می‌کنیم:

$$\widehat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲x\ ,\ \widehat{A}_۲ = x$$

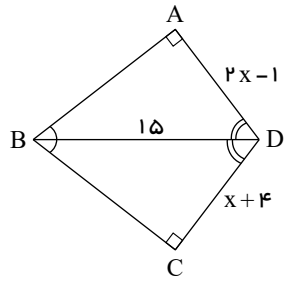
در مثلث ABD داریم:

$$\frac{\widehat{B}}{۲}+\widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{x}{۲}+(۱۸۰-۲x)+x+\widehat{D}=۱۸۰ \Rightarrow \widehat{D}=\frac{x}{۲}$$

$$\frac{\widehat{B}}{۲}=\widehat{D} \Rightarrow AB=AD=AC$$



۶۸ - گزینه ۴ باتوجه به شکل زیر و خواص نیم‌ساز یک زاویه داریم:



$AD=DC \Rightarrow ۲x-۱=x+۴ \Rightarrow x=۵$

$\Rightarrow AD=DC=۹$

$\overset{\Delta}{ABD}: BD^۲=AD^۲+AB^۲ \Rightarrow ۲۲۵=۸۱+AB^۲$

$\Rightarrow AB=۱۲ \Rightarrow BC=۱۲$

$ABCD$ محیط $=۹+۹+۱۲+۱۲=۴۲$

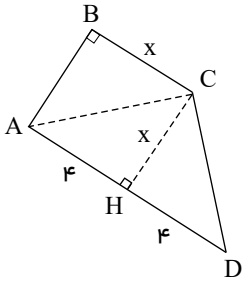
۶۹ - گزینه ۳

نقطه‌ی C روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد. پس:

$$\begin{cases} BC=CH=x \\ AB=AH=۴ \end{cases}$$

نقطه‌ی C روی عمودمنصف ضلع AD قرار دارد. پس:

$$\begin{cases} AC=CD \\ AH=HD=۴ \end{cases}$$



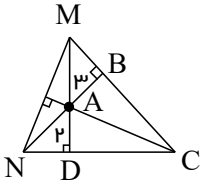
طبق شکل داریم:

$S(ABCD)=S(ABC)+S(ACD)$

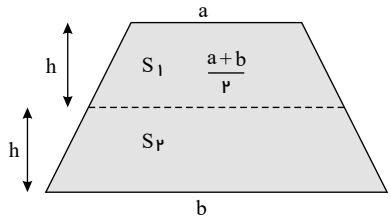
$\frac{۴x}{۲}+\frac{۸x}{۲}=۱۸ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow AC=CD=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$

محیط چهارضلعی: $۴+۳+۵+۸=۲۰$

۷۰ - گزینه ۲ با کمی دقت متوجه می‌شویم که BN و MD برای مثلث CMN حکم ارتفاع را دارند. پس CA نیز بخشی از ارتفاع گذرنده از رأس C است و امتداد آن بر ضلع مقابلش عمود است.



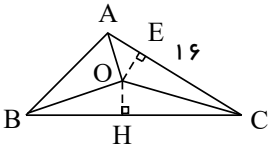
۷۱ - گزینه ۲ اندازهٔ پاره خطی که وسط‌های دو ساق ذوذنقه را به هم وصل می‌کند برابر میانگین دو قاعده است.



$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱}{۲} \to \frac{(a+\frac{a+b}{۲})(h)(\frac{۱}{۲})}{(b+\frac{a+b}{۲})(h)(\frac{۱}{۲})}=\frac{۱}{۲} \to \frac{\frac{۳a+b}{۲}}{\frac{۳b+a}{۲}}=\frac{۱}{۲} \to \frac{۳a+b}{۳b+a}=\frac{۱}{۲} \to ۶a+۲b=۳b+a \to ۵a=b$$

یعنی نسبت قاعده‌های ذوذنقه، ۱ به ۵ است.

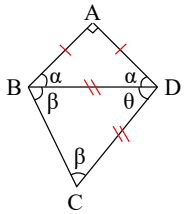
۷۲ - گزینه ۲ می‌دانیم نقطه‌ی همرسی نیم‌سازهای زوایای داخلی هر مثلث از سه ضلع آن مثلث به یک فاصله است، پس $OE=OH=h$، حال:



$$S_{AOC} = \frac{۱}{۲}h \cdot AC \Rightarrow ۸۰ = \frac{۱}{۲}h \times ۱۶ \Rightarrow h = ۱۰cm$$

$$S_{BOC} = \frac{۱}{۲}h \cdot BC = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۲۰ = ۱۰۰cm^۲$$

۷۳ - گزینه ۳ باتوجه به شکل و مفروضات مسأله داریم:

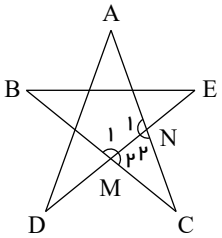


$$A\overset{\Delta}{B}D : ۹۰^\circ + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

$$\hat{B} = ۱۱۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۱۰^\circ \xrightarrow{\alpha = ۴۵^\circ} \beta = ۶۵^\circ$$

$$B\overset{\Delta}{C}D : ۲\beta + \theta = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\beta = ۶۵^\circ} \theta = ۵۰^\circ \Rightarrow A\hat{D}C = \alpha + \theta = ۴۵^\circ + ۵۰^\circ = ۹۵^\circ$$

۷۴ - گزینه ۱



$\widehat{M}_۲$ زاویه‌ی خارجی مثلث $M\overset{\Delta}{E}B$ است: $\widehat{M}_۲ = \widehat{E} + \widehat{B}$

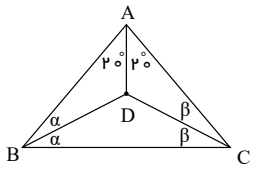
$\widehat{N}_۲$ زاویه‌ی خارجی مثلث $A\hat{D}N$ است: $\widehat{N}_۲ = \widehat{A} + \widehat{D}$

و در مثلث $M\overset{\Delta}{N}C$ داریم:

$$\hat{C} + \hat{M} + \hat{N} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} + \hat{A} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ$$

۷۵ - گزینه ۱

نیمسازهای زوایای داخل هر مثلث همرسند بنابراین AD نیز نیمساز $\hat{A}$ است.

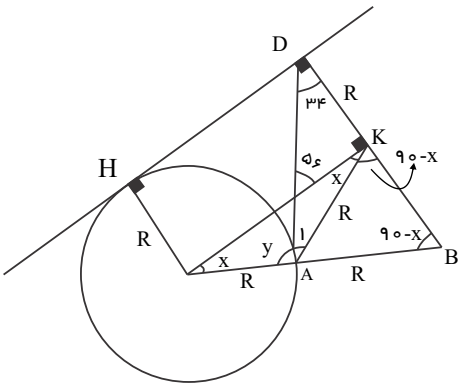


$$A\overset{\Delta}{B}C : ۲\alpha + ۲\beta + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \rightarrow \alpha + \beta = ۷۰^\circ$$

$$B\overset{\Delta}{D}C : \alpha + \beta + B\hat{D}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۷۰^\circ + B\hat{D}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{D}C = ۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ = ۱۱۰^\circ$$

۷۶ - گزینه ۳

بعد از رسم شکل عمود OK را بر BD رسم می‌کنیم. در این صورت $OHDK$ مستطیل و مثلث OBK قائم‌الزاویه است و AK میانه وارد بر وتر است بنابراین مثلث‌های OAK و AKB و AKD متساوی‌الساقین هستند باتوجه به شکل داریم.



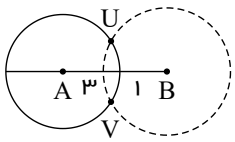
$$\left.\begin{array}{l} x + y + ۵۶ = ۱۸۰ \\ y + ۲x + ۳۴ = ۱۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow x + ۳۴ - ۵۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۲۲$$

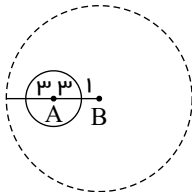
$$x + y + ۵۶ = ۱۸۰ \xrightarrow{x = ۲۲} y = ۱۰۲$$

۷۷ - گزینه ۳

دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم:

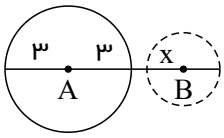


دایره‌ای به مرکز B و شعاع x رسم می‌کنیم. اگر این دو دایره متقاطع باشد، مسأله دو جواب U و V دارد. اگر $x < ۱$ یا $x > ۷$ باشد، دو دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند. در نتیجه $۱ < x < ۷$ است.



حالت $x > ۷$

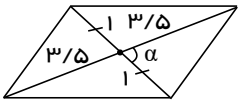
جواب ندارد



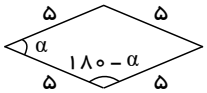
حالت $x < ۱$

جواب ندارد

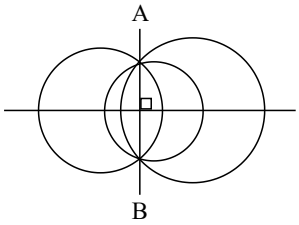
۷۸ - گزینه ۲ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



گزینه‌ی (۱): چون زاویه بین دو قطر معلوم نیست، بنابراین چهار مثلث به وجود آمده توسط قطرها، به صورت منحصر به فرد قابل رسم نیستند و لذا بی‌شمار متوازی‌الاضلاع قابل رسم است.



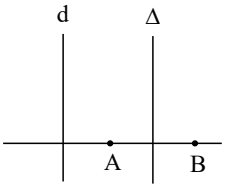
گزینه‌ی (۳): چون زاویه‌ی بین اضلاع مشخص نیستند، بنابراین واضح است که با تغییر α بی‌شمار لوزی قابل رسم است.



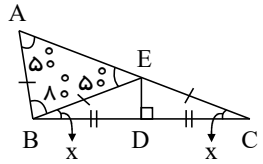
گزینه‌ی (۴): می‌دانیم مرکز دایره‌ای که AB وتر آن است روی عمودمنصف AB قرار دارد. چون هر نقطه روی عمودمنصف AB می‌تواند حکم مرکز را داشته باشد، بنابراین مطابق شکل بی‌شمار دایره از AB می‌گذرد.

گزینه‌ی (۲): مطابق فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی هر مربع با داشتن قطر آن به صورت منحصربه‌فرد قابل رسم است.

۷۹ - گزینه ۳ مجموعه نقاطی از صفحه که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. واضح است که اگر d بر عمودمنصف AB منطبق باشد، بی‌شمار نقطه روی آن وجود دارد که از A و B به یک فاصله هستند. در صورتی که خط d عمود بر ABعمود بوده ولی بر عمودمنصف AB منطبق نباشد (مطابق شکل) هیچ نقطه‌ای روی d وجود ندارد که به فاصله‌ی مساوی از A و B باشد در سایر حالت‌های خط d، مسأله همواره یک جواب دارد.



۸۰ - گزینه ۱ از E به B وصل می‌کنیم. چون E روی عمودمنصف BC واقع است، پس $EB = EC$ است. حال:



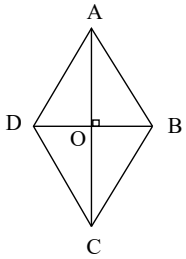
$$EB = EC \xrightarrow{EC=AB} EB = AB$$

$$\Rightarrow A\hat{E}B = ۵۰^\circ \Rightarrow A\hat{B}E = ۸۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : \hat{A} + A\hat{B}C + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۵۰^\circ + (\alpha + ۸۰^\circ) + \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۵۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۵^\circ$$

۸۱ - گزینه ۲ اگر AC قطر بزرگ لوزی باشد، آن‌گاه $AC \geq BD$ و به طور مشابه $OA \geq OB$. در مثلث OAB داریم:



$$OA^۲ \geq OB^۲ \Rightarrow ۲OA^۲ \geq \underbrace{OA^۲ + OB^۲}_{AB^۲} \Rightarrow ۲OA^۲ \geq AB^۲$$

$$\xrightarrow{AB=۱۰} ۲OA^۲ \geq ۱۰۰ \Rightarrow OA^۲ \geq ۵۰ \Rightarrow OA \geq ۵\sqrt{۲}$$

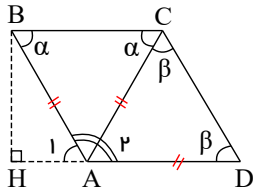
بنابراین حداقل طول قطر بزرگ لوزی (AB) برابر $۲ \times ۵\sqrt{۲} = ۱۰\sqrt{۲}$ است.

۸۲ - گزینه ۱

$\hat{A} = ۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۰۰^\circ \Rightarrow \widehat{B} < ۱۰۰^\circ \Rightarrow A\widehat{B}D = \frac{\widehat{B}}{۲} < ۵۰^\circ$

$A\overset{\Delta}{B}D$ زاویه‌ی خارجی: $B\widehat{D}C = ۸۰^\circ + A\widehat{B}D \Rightarrow ۸۰^\circ < B\widehat{D}C < ۱۳۰^\circ$

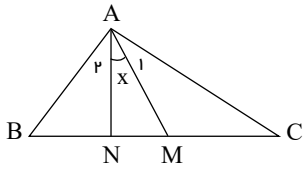
۸۳ - گزینه ۱ در چهارضلعی $ABCD$ داریم:



$$\begin{cases} \hat{C} = \alpha + \beta = ۱۱۰^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۲(\alpha + \beta) = ۲۲۰^\circ \end{cases}$$
$$\Rightarrow B\hat{A}D = \hat{A}_۲ = ۳۶۰^\circ - ۲۲۰^\circ = ۱۴۰^\circ$$

پس $\hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - \hat{A}_۲ = ۴۰^\circ$ و در نتیجه در مثلث ABH داریم: $A\hat{B}H = ۹۰^\circ - \hat{A}_۱ = ۹۰^\circ - ۴۰^\circ = ۵۰^\circ$

۸۴ - گزینه ۱ چون دو مثلث CAN و BAM متساوی‌الساقین هستند، داریم:



$$\hat{N} = \hat{x} + \hat{A}_۱ \quad , \quad \hat{M} = \hat{x} + \hat{A}_۲$$

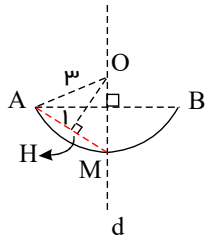
از طرفی: $\widehat{N} + \widehat{M} + \widehat{x} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow (\widehat{x} + \widehat{A}_۱) + (\widehat{x} + \widehat{A}_۲) + \widehat{x} = ۱۸۰^\circ \ (۱)$

$\widehat{A} = ۷۲^\circ \Rightarrow \widehat{A}_۱ + \widehat{x} + \widehat{A}_۲ = ۷۲^\circ \ (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow ۲\widehat{x} = ۱۰۸^\circ \Rightarrow \widehat{x} = M\widehat{A}N = ۵۴^\circ$

۸۵ - گزینه ۳ مرکز دایره نقطه‌ای است که همه‌ی نقاط روی دایره از آن به یک فاصله هستند. مرکز دایره روی خط d قرار دارد، چون d عمودمنصف وتر AB است. برای دقیق مشخص شدن مرکز دایره، عمودمنصف AM را رسم کرده و با d قطع می‌دهیم. این نقطه همان مرکز دایره است. چون $AO = MO = BO$

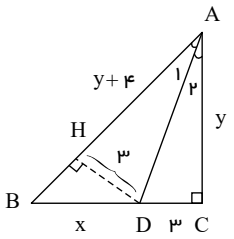
حال در مثلث AHO داریم:



$$AO^۲ = AH^۲ + OH^۲$$
$$\Rightarrow OH^۲ = ۳^۲ - ۱^۲ = ۸ \Rightarrow OH = \sqrt{۸} = \sqrt{۴ \times ۲} = ۲\sqrt{۲}$$

۸۶ - گزینه ۳

کافی است از D به ضلع AB عمود رسم کنیم. چون نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ BAC است بنابراین: $DH = DC = ۳cm$



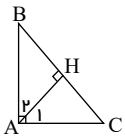
از طرفی: $AH = AC = y$ در نتیجه:

$BH = BA - AH \Rightarrow BH = y + ۴ - y = ۴$

بنابراین:

$B\overset{\Delta}{H}D : \hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow BD^۲ = HD^۲ + BH^۲ \Rightarrow x^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow x = ۵$

۸۷ - گزینه ۳ ابتدا با برهان خلف فرض می‌کنیم که AH بر BC عمود باشد $(A\hat{H}B = ۹۰^\circ)$ در این صورت داریم:



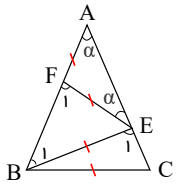
$$\begin{cases} A\overset{\Delta}{C}H : \hat{A}_۱ + \hat{C} = ۹۰^\circ & \text{قائم‌الزاویه} \\ \overset{\Delta}{ABC} : \hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ & \text{قائم‌الزاویه} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}$$

که در تناقض با فرض مسأله است. پس AH نمی‌تواند بر BC عمود باشد یعنی فرض برهان خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. $(A\hat{H}B \neq ۹۰^\circ)$

از طرفی با توجّه به این‌که در فرضیات مسئله شرطی جز $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{A}_۱ \neq \hat{B}$ مطرح نشده، لذا دو زاویهٔ B و C می‌توانند با یکدیگر برابر باشند $(\hat{A}_۱ \neq \hat{B})$ بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» نیز

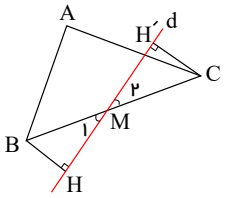
لزوماً صحیح نمی‌باشند.

۸۸ - گزینه ۳ اگر $\hat{A}=\alpha$ فرض شود، چون $AF=FE$، لذا $\hat{A}=A\hat{E}F=\alpha$ ، از طرفی $\hat{F}_1$ زاویه‌ی خارجی مثلث AFE است، لذا: $\hat{F}_1=\hat{B}_1=2\alpha$ ، به همین ترتیب $\hat{E}_1$ زاویه‌ی خارجی مثلث ABE است. پس $\hat{E}_1=3\alpha$ و چون $BE=BC$ ، در نتیجه $\hat{C}=3\alpha$.



$$AB=AC\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=3\alpha$$
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow \alpha+3\alpha+3\alpha=180^\circ$$
$$\Rightarrow 7\alpha=180^\circ\Rightarrow \alpha=\frac{180^\circ}{7}$$

۸۹ - گزینه ۴



خط d را به دلخواه از نقطه‌ی M وسط ضلع BC می‌گذرانیم، BH و CH' فاصله‌های دو رأس B و C از خط d هستند. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی MBH و MCH' به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده $(MB=MC\ ,\ \widehat{M}_1=\widehat{M}_2)$ همنهشت هستند. بنابراین $BH=CH'$. یعنی برای برابری فاصله‌ی رأس‌های B و C از خط d، کافی است این خط از وسط ضلع BC عبور کند.

۹۰ - گزینه ۳

$$A\widehat{C}B=D\widehat{C}E=60^\circ\Rightarrow A\widehat{C}D=B\widehat{C}E=120^\circ$$
$$\left.\begin{array}{r}AC=BC\\ A\widehat{C}D=B\widehat{C}E\\ CD=CE\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\Delta}{C}D\cong B\widehat{E}C\Rightarrow C\widehat{A}D=C\widehat{B}E$$

از طرفی داریم:

$$C\widehat{B}E=A\widehat{B}C-A\widehat{B}E=60^\circ-40^\circ=20^\circ$$

بنابراین $C\widehat{A}D=20^\circ$