پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$BC' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow \frac{۳}{۷} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow AC' = \frac{۳}{۷}CC'$$

۲ - گزینه ۱

$$\angle B = \angle E \Rightarrow ED \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{۸}{AB} = \frac{۶}{۹} \Rightarrow AB = ۱۲ \Rightarrow EB = AB - AE = ۴$$

۳ - گزینه ۲ چون M وسط AB است و MN موازی با BC می‌باشد، بنابراین N نیز وسط CD است. می‌دانیم طول پاره‌خطی که اوساط دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر با نصف مجموع طول دو قاعده است. بنابراین داریم:

$$MN = \frac{AD + BC}{۲} \Rightarrow ۲x = \frac{۸ - x + ۴ + x}{۲} = ۶ \Rightarrow x = ۳$$

۴ - گزینه ۱

$$DE \| BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{۲x - ۳} = \frac{x + ۲}{۲x} \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow AB = ۱۵$$

۵ - گزینه ۳ بنابر قضیه‌ی تالس بین خطوط موازی داریم:

$$d_۱ \parallel d_۲ \parallel d_۳ \Rightarrow \frac{۲}{x + ۱} = \frac{x + ۱}{۸} \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۱۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۵ \end{cases}$$

که $x = -۵$ غیر قابل قبول است.

۶ - گزینه ۳

$$DD' \parallel BC = \frac{AD}{AB} = \frac{DD'}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{DD'}{۸} \Rightarrow DD' = \frac{۸}{۳}$$

$$EE' \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EE'}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{EE'}{۸} \Rightarrow EE' = \frac{۱۶}{۳}$$

$$\Rightarrow DD' + EE' = \frac{۸}{۳} + \frac{۱۶}{۳} = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

۷ - گزینه ۳

$$BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{x - ۱}{۲x} = \frac{x - ۱}{x + ۳} \Rightarrow ۲x = x + ۳ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow x = ۳$$

۸ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر دو خط مورب سه خط موازی d ، d' و d'' را قطع کنند پاره خط‌های ایجاد شده روی خطوط مورب نسبت‌های مساوی دارند. بنابراین:

$$\frac{۲x}{x - ۴} = \frac{۲x + ۳}{x - ۵} \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۰x = ۲x^۲ - ۵x - ۱۲ \Rightarrow ۵x = ۱۲ \Rightarrow x = ۲/۴$$

۹ - گزینه ۳ با مثال نقض حکم کلی نقض شد.

عدد ۰ گویاست. $\sqrt{۱۲} + (-۲\sqrt{۳}) = \sqrt{۴ \times ۳} + (-۲\sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۳} + (-۲\sqrt{۳}) = ۰$

۱۰ - گزینه ۱ استدلال استنتاجی روش نتیجه گیری کلی بر مبنای حقایقی است که تا کنون درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بنابراین گزینه (۱) درست است.

۱۱ - گزینه ۳ نقطه ی همرسی عمود منصف های اضلاع یک مثلث قائم الزاویه روی وتر آن (وسط وتر) واقع است. بنابراین این نوع مثلث مثال نقضی برای رد حکم کلی مذکور است.

۱۲ - گزینه ۳ عکس قضیه‌ی هر یک از گزینه ها را می‌نویسیم:

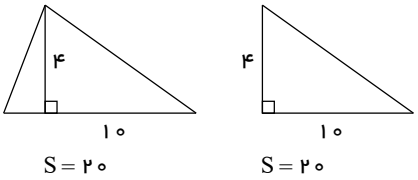
۱) اگر هر زاویه ی یک مثلث ۶۰° باشد، آن گاه سه ضلع آن برابرند.

۲) مثلثی که دو ضلع برابر دارد، دارای دو زاویه ی برابر است.

۳) هر دو مثلث با مساحت برابر، همنهشت‌اند.

۴) اگر دو مثلث متشابه باشند، آن گاه دو زاویه از هر مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر است.

تنها گزینه (۳) است که عکس قضیه‌ی آن یک قضیه‌ی شرطی نیست و طبق تعریف قضیه‌ی دو شرطی، این قضیه دو شرطی نمی باشد.

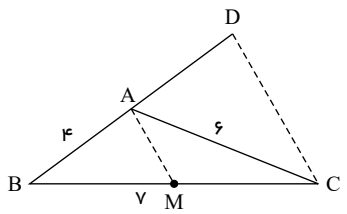


۱۳ - گزینه ۴ گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) به صورت قضیه‌ی دو شرطی قابل بیان هستند، اما عکس گزاره‌ی گزینه‌ی (۴) الزاماً درست نیست. یعنی ممکن است در یک مثلث ضلعی از دو ضلع دیگر بزرگتر باشد، اما مثلث زاویه‌ی ۹۰° نداشته باشد.

۱۴ - گزینه ۴ استدلال استنتاجی بر مبنای حقایقی است که درستی آنها پذیرفته‌ایم.

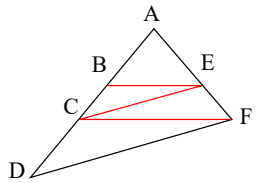
۱۵ - گزینه ۲

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



$$AM||DC \to \frac{BA}{BD}=\frac{BM}{BC} \to \frac{۴}{BD}=\frac{۳/۵}{۷}=\frac{۱}{۲} \to BD=۸$$

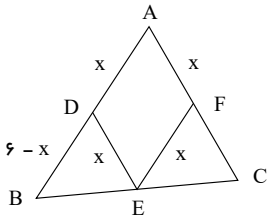
۱۶ - گزینه ۲ اگر CD را برابر x در نظر بگیریم، داریم:



$$\begin{cases} BE||CF \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF} \\ CE||DF \Rightarrow \frac{AE}{AF}=\frac{AC}{AD} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^۲=AB\times AD \Rightarrow ۸^۲=۵AD \Rightarrow AD=\frac{۶۴}{۵}$$

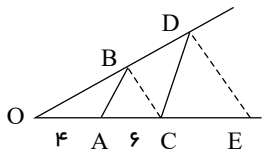
$$CD=AD-AC=\frac{۶۴}{۵}-۸=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

۱۷ - گزینه ۴ با فرض اینکه طول ضلع لوزی x باشد: $AD=x$ و در لوزی $ADFE$ اضلاع $ED||AF$ پس داریم:



$$ED \parallel AC \Rightarrow \frac{DB}{AB}=\frac{ED}{AC}=\frac{۶-x}{۶}=\frac{x}{۴}=۲۴-۴x=۶x \Rightarrow x=AD=\frac{۱۲}{۵}$$

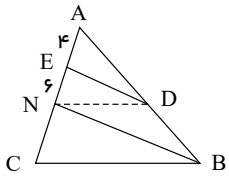
۱۸ - گزینه ۲



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD} \\ BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OB}{OD}=\frac{OC}{OE} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{۴}{۱۰}=\frac{۱۰}{OE} \Rightarrow OE=۲۵$$

$$CE=۲۵-OC=۲۵-۱۰=۱۵$$

۱۹ - گزینه ۴

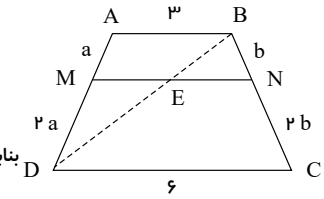


$$ED \parallel NB \Rightarrow \frac{AE}{AN}=\frac{AD}{AB}(۱)$$
$$ND \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AN}{AC}(۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{AE}{AN}=\frac{AN}{AC}$، پس:

$$\frac{۴}{۱۰}=\frac{۱۰}{AC} \Rightarrow AC=۲۵$$

۲۰ - گزینه ۳ با توجه به شکل اگر قطر DB را رسم کنیم تا MN را در E قطع کند.



$$(\text{در مثلث } DAB): ME \parallel AB \Rightarrow \frac{MD}{AD}=\frac{ME}{AB}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow ME=۲$$

$$(\text{در مثلث } BDC): EN \parallel DC \Rightarrow \frac{EN}{DC}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{EN}{۶}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow EN=۲$$

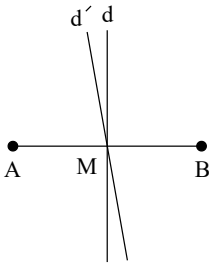
بنابراین: $MN=ME+EN=۴$.

۲۱ - گزینه ۱ با توجه به شکل صورت مسأله:

$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AF} \\ FE \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{AF}=\frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{۲}{۶}=\frac{۶}{AC} \Rightarrow AC=۱۸$$

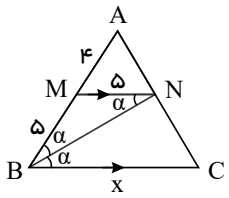
$$FC=AC-AF=۱۸-۶=۱۲$$

۲۲ - گزینه ۴



به روش برهان خلف فرض می‌کنیم دو خط d و d' هر دو عمودمنصف پاره‌خط AB باشند. در این صورت چون d و d' هر دو بر پاره‌خط عمود هستند، پس موازی یکدیگرند. از طرفی هر دو خط d و d' از نقطه‌ی M (وسط پاره خط AB) عبور می‌کند، پس متقاطع‌اند. بنابراین چون دو خط متقاطع نمی‌توانند موازی یکدیگر باشند، پس فرض برهان خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

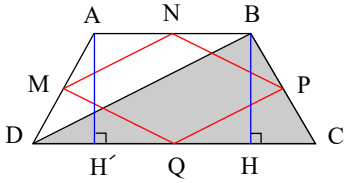
۲۳ - گزینه ۲



$$MN||BC \Rightarrow M\hat{N}B = N\hat{B}C \xrightarrow{\text{نیمساز } BN} M\hat{B}N = \alpha \Rightarrow MN = MB = ۵$$

$$MN||BC \Rightarrow \frac{MN}{x} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{۵}{x} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow x = \frac{۴۵}{۴} = ۱۱٫۲۵$$

۲۴ - گزینه ۲ اگر ارتفاع‌های AH' , BH را رسم کنیم دو مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت ایجاد می‌شود. داریم:



$$DH' = HC = \frac{۱۲ - ۴}{۲} = ۴$$

$$\text{قطر } DB = \sqrt{BH^۲ + DH^۲} = \sqrt{۱۶ + ۶۴} = ۴\sqrt{۵}$$

با توجه به رابطه‌ی تالس می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی $MNPQ$ که وسط‌های اضلاع ذوزنقه را به هم وصل کرده لوزی و اندازه‌ی هر ضلع آن نصف قطر ذوزنقه است و محیط آن برابر مجموع ۲ قطر ذوزنقه است. پس داریم:

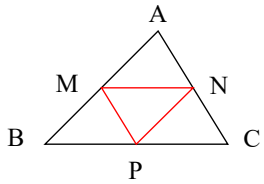
$$\text{محیط} MNPA = (\text{مجموع اقطار}) = (۴\sqrt{۵} + ۴\sqrt{۵}) = ۸\sqrt{۵}$$

۲۵ - گزینه ۳

کافیست دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} ED \parallel FC \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{AD}{DC} \\ FD \parallel BC \Rightarrow \frac{۵}{FB} = \frac{AD}{DC} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{FB} \Rightarrow FB = ۷٫۵$$

۲۶ - گزینه ۱ تذکر: اگر اوساط اضلاع ABC را به هم وصل کنیم ۴ مثلث همنهشت پدید می‌آید که محیط هر یک از آن‌ها $\frac{۱}{۲}$ محیط مثلث ABC است و مساحت هر کدام از آن‌ها $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث اولیه است.



$$(\text{محیط } MNP) = \frac{۱}{۲}(\text{محیط } ABC) \Rightarrow \text{محیط } ABC = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

۲۷ - گزینه ۱ چون ABC متساوی‌الساقین است پس $HB = HC = \frac{۱}{۲}BC$. از طرفی $MN \parallel AH \Rightarrow \frac{CN}{CH} = \frac{MN}{AH} = \frac{۲}{۳}$

و $MN^۲ = CN \times NB$ (در مثلث $\overset{\Delta}{BMC}$ ارتفاع وارد بر وتر MN واسطه‌ی هندسی بین قطعات ایجاد شده روی وتر است) پس $CN \times BN = ۴$.

بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{CN}{CH} = \frac{۲}{۳} \\ CN \times BN = ۴ \end{cases} \quad CN = ۲a \ , \ CH = ۳a = BH \Rightarrow \begin{cases} HN = a \\ BN = ۴a \end{cases}$$

پس $CN \times BN = ۲a \times ۴a = ۴ \Rightarrow a = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ یا $CN = ۲a = \sqrt{۲}$.

۲۸ - گزینه ۳ نکته: پاره‌خطی که وسط‌های ۲ ساق را به هم وصل می‌کند پاره خط میانگین ذوزنقه است و اندازه‌اش میانگین ۲ قاعده است.

نکته: با توجه به نکته‌ی قبل می‌توان گفت:

$$MN = \frac{AB + DC}{۲}$$

ارتفاع × پاره‌خط میانگین = مساحت ذوزنقه

۴ = خط میانگین → ۳× خط میانگین = ۱۲

۲۹ - گزینه ۳ با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}=\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{BD}{AD}=\frac{CE}{AE}=\frac{۱}{۲}$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، طبق عکس قضیه‌ی تالس می‌توان نتیجه گرفت : $DE||BC$

بنابراین طبق قضیه‌ی تالس خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{DE}{۱۵}\Rightarrow DE=۱۰$$

۳۰ - گزینه ۳ طول پاره‌خط‌ها را (از کوچک به بزرگ) $x_۱$ ، $x_۲$ ، $x_۳$ ، $x_۴$ و $x_۵$ در نظر می‌گیریم. با توجه به توازی این ۵ پاره خط با قاعده‌ی BC ، طبق قضیه‌ی تالس داریم:

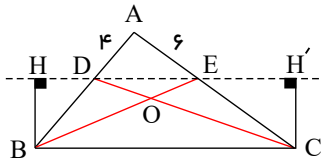
$$\frac{x_۱}{BC}=\frac{۱}{۶},\frac{x_۲}{BC}=\frac{۲}{۶},\cdots,\frac{x_۵}{BC}=\frac{۵}{۶}$$

حال با جای گذاری $BC=۱۸$ خواهیم داشت:

$$x_۱=۳,x_۲=۶,\cdots,x_۵=۱۵\Rightarrow x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۳(۱+۲+۳+۴+۵)=۴۵$$

۳۱ - گزینه ۴

چون $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{۴}{۵}$، پس طبق عکس قضیه‌ی تالس، $DE||BC$. از B و C به ترتیب عمودهای BH و CH' را بر امتدادهای DE وارد می‌کنیم، از آنجا که $DE||BC$، پس $BH=CH'$، بنابراین داریم:

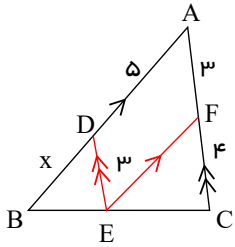


$$\frac{S(B\overset{\Delta}{D}E)}{S(C\overset{\Delta}{D}E)}=\frac{\frac{۱}{۲}BH\times DE}{\frac{۱}{۲}CH'\times DE}=۱\ \Rightarrow\ S(B\overset{\Delta}{D}E)=S(C\overset{\Delta}{D}E)$$

$$\Rightarrow\ S(B\overset{\Delta}{D}E)-S(O\overset{\Delta}{D}E)=S(C\overset{\Delta}{D}E)-S(O\overset{\Delta}{D}E)$$

$$\Rightarrow\ S(O\overset{\Delta}{B}D)=S(O\overset{\Delta}{C}E)\ \Rightarrow\ \frac{S(O\overset{\Delta}{B}D)}{S(O\overset{\Delta}{C}E)}=۱$$

۳۲ - گزینه ۱ چهار ضلعی $ADEF$ متوازی‌الاضلاع است پس $DE=AF=۳$ و $AD=EF=۵$.



$$DE\,||AC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{۳}{۳+۴}=\frac{x}{x+۵}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{x}{۵}\Rightarrow x=\frac{۱۵}{۴}$$

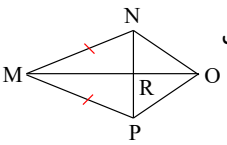
۳۳ - گزینه ۲ - دو مثلث هم نهشت دارای مساحت‌های مساوی هستند. نقیض: دو مثلث دارای مساحت مساوی هم نهشت هستند (غلط)

- اگر $a<b$ آنگاه $a^۲<b^۲$. نقیض اگر $a^۲<b^۲$ آنگاه $a<b$ (غلط) ،مثال نقض: $۲<-۳\rightarrow ۲^۲<(-۳)^۲$

- رابطه‌ی فیثاغورس بوده و هم خود و هم عکس آن درست است.

بنابراین فقط ۱ مورد درست است.

۳۴ - گزینه ۱



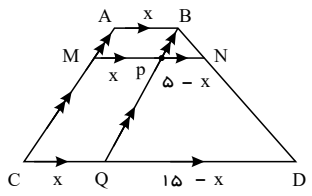
اگر OM نیمساز زاویه $P\hat{M}N$ باشد آنگاه دو مثلث OPM , OMN به حالت (ض ز ض) همنهشت می‌شوند پس $ON=OP$ که این خلاف فرض است پس گزاره‌ی (الف) نادرست است.

از طرفی اگر OM بر NP عمود باشد چون $MN=MP$ نتیجه میگیریم OM عمود منصف NP است

در نتیجه $ON=OP$ و این خلاف فرض است پس گزاره‌ی (ب) نیز نادرست است در ضمن اگر OM و NP همدیگر را نصف کنند. چهارضلعی $ONMP$ لوزی می‌شود و لازم است $ON=OP$ باشد که خلاف فرض است پس گزاره‌ی «ج» نادرست است.

بنابراین هیچ کدام درست نیست.

۳۵ - گزینه ۲



$$BQ||AC \Rightarrow MP = AB = CQ = x$$

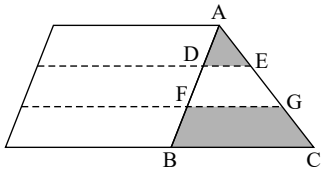
$$\Rightarrow PN = ۵ - x, DQ = ۱۵ - x$$

$$\overset{\triangle}{BQD} : PN||DQ \Rightarrow \frac{۵ - x}{۱۵ - x} = \frac{BN}{BD}\ ,\ \frac{BN}{BD} = \frac{BN}{BN + ND} = \frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۵ - x}{۱۵ - x} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow ۲۵ - ۵x = ۱۵ - x \Rightarrow ۴x = ۱۰ \Rightarrow x = ۲/۵$$

۳۶ - گزینه ۲

روش اول:



طبق قضیهٔ تالس $\frac{DE}{BC} = \frac{۱}{۳}$ و $\frac{FG}{BC} = \frac{۲}{۳}$ است.

$$\frac{S_{ADE}}{S_{FGCB}} = \frac{(\frac{۱}{۲})(h)(DE)}{(\frac{۱}{۲})(h)(FG + BC)} = \frac{DE}{FG + BC} = \frac{\frac{۱}{۳}BC}{\frac{۲}{۳}BC + BC} = \frac{\frac{۱}{۳}BC}{\frac{۵}{۳}BC} = \frac{۱}{۵}$$

روش دوم:

نسبت مساحت‌های محصور بین خطوط موازی، ۱ به ۳ به ۵ به ۷ به ۹ به ... است پس طبق این توضیح، خواستهٔ مسئله برابر $\frac{۱}{۵}$ است.

۳۷ - گزینه ۴

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{۳}{۱۸} = \frac{۱}{۶} \to \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{۱}{۵} \to \frac{AM + AN}{MB + NC} = \frac{۱}{۵}\ (*)$$

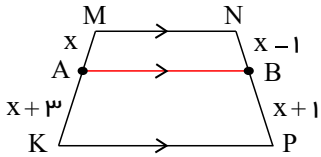
از طرفی طبق فرضیات مسئله می‌توان نتیجه گرفت:

$$AM + MN + AN = ۸ \to AM + AN = ۵$$

بنابراین طبق رابطهٔ $(*)$ داریم:

$$MB + NC = ۵(AM + AN) = ۵ \times ۵ = ۲۵$$

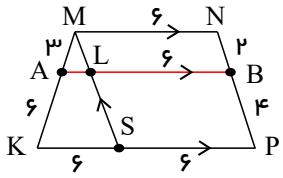
۳۸ - گزینه ۴ در ذوزنقه‌ی $MNPK$، چون پاره‌خط AB با قاعده‌های ذوزنقه موازی است، پس طبق قضیه‌ی تالس نتیجه می‌شود که:



$$\frac{MA}{AK} = \frac{NB}{BP} \Rightarrow \frac{x}{x + ۳} = \frac{x - ۱}{x + ۱}$$

$$\Rightarrow x^۲ + x = x^۲ + ۲x - ۳ \Rightarrow x = ۳$$

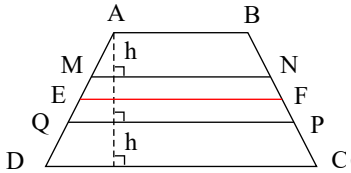
پس شکل به صورت زیرخواهد شد که با رسم خطی از رأس M موازی ساق NP خواهیم داشت:



$$\overset{\triangle}{MKS} : AL||KS \to \frac{AL}{KS} = \frac{MA}{MK} \Rightarrow \frac{AL}{۶} = \frac{۳}{۹}$$

$$\Rightarrow AL = ۲ \Rightarrow AB = AL + LB = ۲ + ۶ = ۸$$

۳۹ - گزینه ۱ نقاط E و F که اوساط دو ساق BC و AD می‌باشند را به هم وصل می‌کنیم. واضح است E و F اوساط ساق‌های NP و MQ از ذوزنقه‌ی $MNPQ$ نیز می‌باشند. بنابراین داریم:



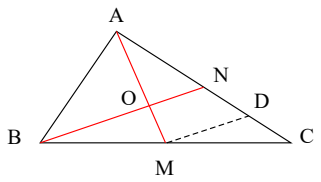
$$EF = \frac{AB + CD}{۲} = \frac{MN + PQ}{۲}$$

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{MN + PQ}{۲} \times h}{\frac{AB + CD}{۲} \times ۳h} = \frac{EF \times h}{EF \times ۳h} = \frac{۱}{۳}$$

تالس

۴۰ - گزینه ۳ از M پای میانه موازی ON رسم کرده تا AC را در نقطه‌ی D قطع کند، از قضیه‌ی تالس نتیجه می‌گیریم:

$$MD \parallel BN \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{CD}{ND} \xrightarrow{MC=MB} CD = ND$$



در مثلث AMD چون O وسط ضلع AM است: $MD \parallel ON \Rightarrow ON = \frac{۱}{۲}MD$

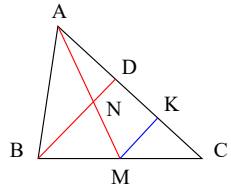
بنابراین:

$$ON = \frac{۱}{۲}MD = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}BN\right) = \frac{۱}{۴}BN$$

۴۱ - گزینه ۳ از M خطی به موازات BD رسم می‌کنیم تا AC را در K قطع کند. طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$ND \| MK \Rightarrow \frac{ND}{MK} = \frac{AN}{AM} = \frac{۱}{۲}$$

$$MK \| BD \Rightarrow \frac{MK}{BD} = \frac{CM}{CB} = \frac{۱}{۲}$$



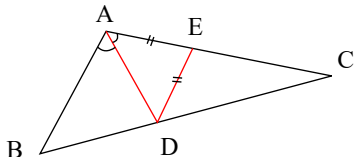
با توجه به روابط فوق داریم:

$$\frac{ND}{BD} = \frac{ND}{MK} \cdot \frac{MK}{BD} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ND = \frac{۱}{۴}BD \Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۴}BD \Rightarrow BD = ۴$$

۴۲ - گزینه ۲ بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌گیریم $\hat{D}_۱ = \hat{A}_۱$. چون AD نیمساز است پس $\hat{D}_۲ = \hat{A}_۲$، بنابراین $DE = AE$ داریم:

$$۵AB = ۳AC = ۶۰ \Rightarrow \begin{cases} AC = ۲۰ \\ AB = ۱۲ \end{cases}$$



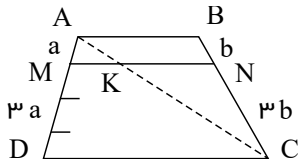
$$DE \| AB \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{DE}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

$$\frac{DE}{۱۲} = \frac{EC}{۲۰} \xrightarrow{DE=AE} \frac{AE}{۱۲} = \frac{EC}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{۱۲}{۲۰} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AC}{EC} = \frac{۳۲}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲۰}{EC} = \frac{۳۲}{۲۰} \Rightarrow EC = ۱۲/۵$$

۴۳ - گزینه ۴ بنابر فرض اگر $AM = a$ آنگاه $MD = ۳a$ و اگر $BN = b$ آنگاه $NC = ۳b$. از A به C وصل کرده بنابر قضیه‌ی تالس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MK \| DC \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{MK}{DC} = \frac{a}{۴a} \Rightarrow MK = \frac{۱}{۴}DC \\ NK \| AB \Rightarrow \frac{KN}{AB} = \frac{NC}{BC} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow KN = \frac{۳}{۴}AB \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جمع}} MN = MK + KN = \frac{۳}{۴}AB + \frac{۱}{۴}DC$$



۴۴ - گزینه ۴ روش اول:

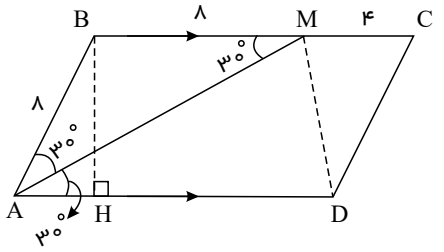
$$BM \| AD \Rightarrow B\hat{M}A = ۳۰^\circ \Rightarrow AB = BM = ۸$$

$$\Rightarrow AB = ۸\ ,\ AD = BC = ۱۲$$

$$\overset{\triangle}{ABH} : AB = ۸\ ,\ \hat{A} = ۶۰^\circ \Rightarrow BH = ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

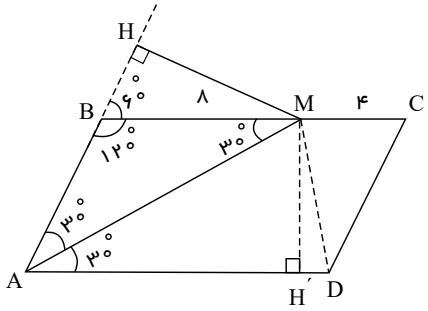
$$S_{ABCD} = BH \times AD = ۴\sqrt{۳} \times ۱۲ = ۴۸\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AMD}} = \frac{۱}{۲} \times BH \times AD = \frac{۱}{۲}S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} \times ۴۸\sqrt{۳} = ۲۴\sqrt{۳}$$



روش دوم:

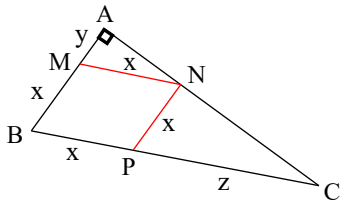
طبق خاصیت نیمساز می‌دانیم فاصلهٔ M از دو ضلع AB و AD باهم برابر است و ازطرفی طول ضلع AB برابر BM و مساوی ۸ است:



$$MH' = MH = MB\sin ۶۰^\circ = ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\triangle}{MAD}} = \frac{۱}{۲}MH' \times AD = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۳} \times ۱۲ = ۲۴\sqrt{۳}$$

۴۵ - گزینه ۲ اگر طول ضلع لوزی x باشد:



$$x + y = \frac{۱}{۲}(x + z) \Rightarrow x + z = ۲(x + y) \quad (I)$$

$$NP \| AB \Rightarrow \frac{z}{x + z} = \frac{x}{x + y}$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{z}{۲(x + y)} = \frac{x}{x + y} \Rightarrow z = ۲x$$

بنابراین: $\frac{BC}{x} = \frac{x + z}{x} = \frac{x + ۲x}{x} = \frac{۳x}{x} = ۳$

۴۶ - گزینه ۳ باتوجه به قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ABD و BDC داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{MP}{AB} = \frac{MD}{AD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MP = \frac{AB}{۲} \\ \frac{PN}{DC} = \frac{BN}{BC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow PN = \frac{DC}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow MN = \frac{a + b}{۲}$$

همچنین داریم:

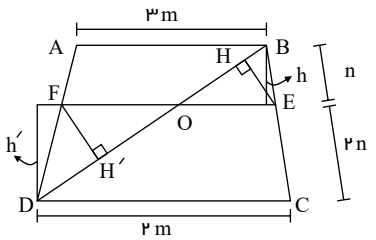
$$\frac{MQ}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MQ = \frac{DC}{۲} \Rightarrow PQ = MQ - MP = \frac{a - b}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{a + b}{a - b}$$

۴۷ - گزینه ۳

با توجه به اطلاعات داده‌شده شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم:



می‌دانیم:

$$S_{\overset{\triangle}{OBE}} = \frac{OE \times h}{۲} \quad , \quad S_{\overset{\triangle}{OFD}} = \frac{OF \times h'}{۲}$$

حال داریم:

$$\frac{h}{h'} = \frac{n}{۲n} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow h' = ۲h$$

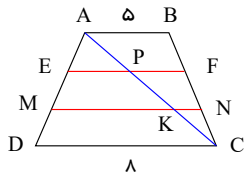
$$\overset{\triangle}{BCD} : \frac{OE}{CD} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{OE}{۴m} = \frac{n}{۳n} \Rightarrow OE = \frac{۴}{۳}m$$

$$\overset{\triangle}{BDA} : \frac{OF}{AB} = \frac{DF}{AD} \Rightarrow \frac{OF}{۳m} = \frac{۲n}{۳n} \Rightarrow OF = ۲m$$

در نهایت:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OBE}}}{S_{\overset{\triangle}{OFD}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳}m \times h}{\frac{۱}{۲} \times ۲m \times ۲h} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{OBE}}}{S_{\overset{\triangle}{OFD}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times EH \times OB}{\frac{۱}{۲} \times FH' \times OD} = \frac{n \times EH}{۲n \times FH'} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{EH}{FH'} = \frac{۲}{۳}$$

۴۸ - گزینه ۳ از A به C وصل می‌کنیم. با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:



$$MK \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{MK}{DC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow MK = \frac{۱۶}{۳}$$

$$KN \parallel AB \Rightarrow \frac{KN}{AB} = \frac{CN}{CB} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow KN = \frac{۵}{۳}$$

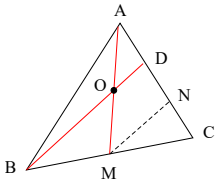
$$\Rightarrow MN = MK + KN = \frac{۱۶}{۳} + \frac{۵}{۳} = \frac{۲۱}{۳} = ۷$$

$$\left.\begin{array}{l} EP \parallel DC \Rightarrow \frac{EP}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow EP = \frac{۸}{۳} \\ PF \parallel AB \Rightarrow \frac{PF}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow PF = \frac{۱۰}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow EF = \frac{۸}{۳} + \frac{۱۰}{۳} = ۶$$

پس $\frac{EF}{MN} = \frac{۶}{۷}$.

۴۹ - گزینه ۲ از M موازی BD رسم کرده در مثلث AMN چون O وسط AM و $OD \parallel MN$ است، پس $OD = \frac{۱}{۲}MN$.

از طرفی در مثلث CDB : $MN \parallel BD$ و M وسط BD است، پس $MN = \frac{۱}{۲}BD$. بنابراین:

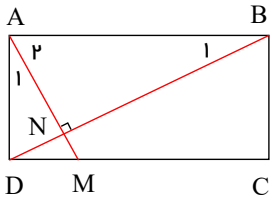


$$OD = a \Rightarrow MN = ۲a \Rightarrow BD = ۴a \Rightarrow ۱۲ = ۳a \Rightarrow a = ۴$$

بنابراین $OD = ۴$

۵۰ - گزینه ۴

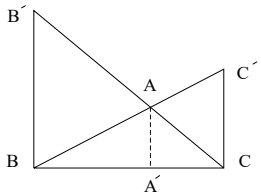
زاویه‌های $A_۱$ و $B_۱$ هر دو متمم $A_۲$ هستند. پس داریم:



$$\begin{cases} \angle A = \angle D = ۹۰ \\ \angle A_۱ = \angle B_۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta ADM \sim \Delta ADB \Rightarrow \frac{DA}{AB} = \frac{DM}{AD} \xrightarrow{AB=۲AD} \frac{DA}{۲DA} = \frac{DM}{\frac{۱}{۲}AB} \Rightarrow AB = ۴DM \Rightarrow \frac{AB}{DM} = \frac{۴}{۱}$$

۵۱ - گزینه ۲



$$AA' \parallel BB' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AA'}{BB'} = \frac{CA'}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{BB'} = \frac{CA'}{AA' \times BC} \quad (۱)$$

$$AA' \parallel CC' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AA'}{CC'} = \frac{BA'}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{CC'} = \frac{BA'}{AA' \times BC} \quad (۲)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) $\Rightarrow \frac{۱}{BB'} + \frac{۱}{CC'} = \frac{CA' + BA'}{AA' \times BC} = \frac{BC}{AA' \times BC} = \frac{۱}{AA'}$

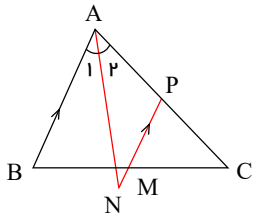
۵۲ - گزینه ۲ محل تقاطع MN با AC را P می‌نامیم. چون M وسط BC است و MP موازی AB می‌باشد، بنابراین طبق قضیه‌ی میان خط P نیز وسط AC می‌باشد. یعنی:

$$AP = \frac{AC}{۲} = ۶$$

از طرفی:

$$MP \| AB \Rightarrow \hat{N} = \hat{A}_۱ \xrightarrow{\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲} \hat{N} = \hat{A}_۲ \Rightarrow AP = NP = ۶$$

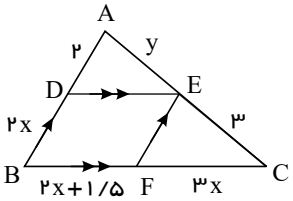
همچنین طبق قضیه‌ی تالس داریم:



$$MP \| AB \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{PC}{AC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{MP}{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MP = ۳$$

$$MN = NP - MP = ۶ - ۳ = ۳$$

۵۳ - گزینه ۴



$$EF \| AB \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{CE}{AC} (I) \ , \ DE \| BC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{DE}{BC} = \frac{CE + AE}{AC} = \frac{AC}{AC} = ۱ \ (۱)$$

$BDEF$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow EF = ۲x \ , \ DE = ۲x + ۱/۵ \ (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{۲x}{۲x+۲} + \frac{۲x+۱/۵}{۵x+۱/۵} = ۱ \Rightarrow \cancel{۱۰x^۲} + ۳x + ۴x^۲ + ۷x \cancel{+۳} = \cancel{۱۰x^۲} + ۱۳x \cancel{+۳}$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۳x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ (غ‌ق‌ق)} \ , \ x = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

۵۴ - گزینه ۲

$$EF||DC \Rightarrow \frac{EF}{DC} = \frac{AF}{AC} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow DC = ۳EF \quad (I)$$

$$EF||AB \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CA} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AB = \frac{۳}{۲}EF \quad (II)$$

$$S_{FEDC} = \frac{(EF+CD)\times ۶}{۲} \overset{(I)}{=\!=} ۳(EF+۳EF) = ۱۲EF$$

$$S_{ABEF} = \frac{(EF+AB)\times ۳}{۲} \overset{(II)}{=\!=} \frac{۳}{۲}(EF+\frac{۳}{۲}EF) = \frac{۳}{۲}\times\frac{۵}{۲}EF = \frac{۱۵}{۴}EF$$

$$\frac{S_{FEDC}}{S_{ABEF}} = \frac{۱۲EF}{\frac{۱۵}{۴}EF} = \frac{۴۸}{۱۵} = \frac{۱۶}{۵} = ۳/۲$$