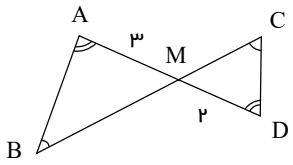
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ تذکر: وقتی دو مثلث متشابه‌اند نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.



$$AB \parallel CD \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta MCD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC} = \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{S_{MCD}}{S_{AMB}} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹}$$

۲ - گزینه ۲

$$\frac{۳}{۵} = \frac{۵}{x} = \frac{۷}{y} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲۵}{۳} \\ y = \frac{۳۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{۲۵ + ۳۵}{۳} = ۲۰$$

۳ - گزینه ۱

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{۱۵}{۸}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{۲۵}{S'} = \left(\frac{۱۵}{۸}\right)^{۲} \Rightarrow S' = \frac{۶۴}{۹} = ۷\frac{۱}{۹}$$

۴ - گزینه ۳

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a_۱}{a_۲} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{۲۱}{a_۲} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow a_۲ = ۲۴\sqrt{۲}$$

۵ - گزینه ۲ با توجه به تعریف تشابه که دو چند ضلعی را متشابه گوییم وقتی زوایای نظیر مساوی داشته باشند و اضلاع نظیر به نظیر متناسب داشته باشند، گزینه‌ی ۲ درست است.

۶ - گزینه ۳ CD و AB هر دو بر AC عمودند و می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط موازیند. پس:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \Delta EDC \sim \Delta EAB$$

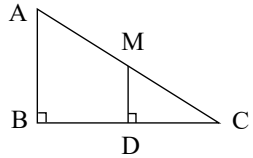
۷ - گزینه ۲

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{۲P}{۲P'}\right)^{۲} = k^{۲} \Rightarrow \frac{۲P}{۲P'} = k$$

نسبت مساحت دو شکل متشابه مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

۸ - گزینه ۴ هر دو مستطیل دلخواه در حالت کلی متشابه نیستند چون ممکن است اضلاع نظیر متناسب نداشته باشند.

۹ - گزینه ۳

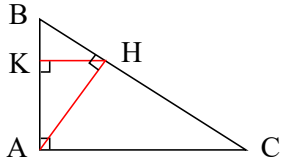


$$MD \perp BC \Rightarrow MD \parallel AB \Rightarrow \Delta MCD \sim \Delta ABC$$

چون نسبت تشابه ۲ است.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MDC}} = \left(\frac{۲}{۱}\right)^{۲} = ۴$$

۱۰ - گزینه ۱ همواره در هر مثلث قائم الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر دو مثلث قائم الزاویه‌ی جدید ایجاد می‌شود که هر دو با مثلث اولیه متشابه هستند. پس داریم:



$$\Delta ABC \sim \Delta ABH \sim \Delta AHC \sim \Delta AKH \sim \Delta HKB$$

پس گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ درست و گزینه‌ی ۱ نادرست است.

۱۱ - گزینه ۴ در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها برابر نسبت اضلاع نظیر است.

محیط مثلث اول $= ۷ + ۵ + ۱۱ = ۲۳$

$$\frac{\text{محیط مثلث اول}}{\text{محیط مثلث دوم}} = \frac{a}{a'} \Rightarrow \frac{۲۳}{\text{محیط مثلث دوم}} = \frac{۵}{۲۲/۵}$$

$\Rightarrow$ محیط مثلث دوم $= ۱۰۳/۵$

۱۲ - گزینه ۳ مثلث‌های ADE و ABC به حالت (ز ز) متشابه‌اند و می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با نسبت تشابه k برابر است با $k^{۲}$.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = k^{۲} \Rightarrow \frac{۲۵}{۲۵+x} = \frac{۲۵}{۴۹} \Rightarrow ۲۵ + x = ۴۹ \Rightarrow x = ۲۴$$

۱۳ - گزینه ۲ در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه این دو مثلث است.

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{۲}{۳} \times \text{نسبت اضلاع} \rightarrow k^{۲} = \frac{۲}{۳}k \rightarrow k = \frac{۲}{۳} \rightarrow \text{نسبت تشابه مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر} = \frac{۳}{۲}$$

$$\text{پس:} \frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲} = \frac{۹}{۴} = ۲٫۲۵$$

۱۴ - گزینه ۳ دو چهار ضلعی را متشابه گویند که زاویه‌های متناظر از آن دو مساوی هم و اضلاع متناظر متناسب باشند. چون اضلاع لوزی برابر هم‌اند، پس دو لوزی با زاویه‌های مساوی متشابه هستند.

۱۵ - گزینه ۲ در دو مثلث متشابه، نسبت طول محیط‌ها با نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها با توان دوم نسبت تشابه برابر است. فرض می‌کنیم AB متناظر DE است.

$$\frac{S(\overset{\Delta}{ABC})}{S(\overset{\Delta}{DEF})} = (\frac{AB}{DE})^{۲} \Rightarrow \frac{۹}{۴} = (\frac{AB}{DE})^{۲} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{۳}{۲} \text{ نسبت تشابه}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ محیط} = ۸ + ۱۰ + ۱۵ = ۳۳ \Rightarrow \frac{\overset{\Delta}{ABC} \text{ محیط}}{\overset{\Delta}{DEF} \text{ محیط}} = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۳۳}{\overset{\Delta}{DEF} \text{ محیط}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \overset{\Delta}{DEF} \text{ محیط} = ۲۲$$

۱۶ - گزینه ۴ محیط مثلث ABC برابر است با $۵ + ۸ + ۱۱ = ۲۴$. بنابراین نسبت تشابه دو مثلث از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

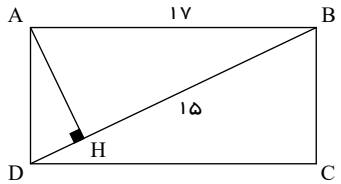
$$k = \frac{\overset{\Delta}{ABC} \text{ محیط}}{\overset{\Delta}{A'B'C'} \text{ محیط}} = \frac{۲۴}{۶۰} = \frac{۲}{۵}$$

در نتیجه نسبت مساحت‌ها برابر است با:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}} = k^{۲} = \frac{۴}{۲۵}$$

۱۷ - گزینه ۱

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:

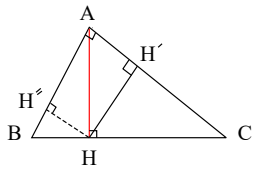


$$(AB)^{۲} = BH \cdot BD \rightarrow ۲۸۹ = ۱۵BD \rightarrow BD = \frac{۲۸۹}{۱۵}$$

اکنون می‌خواهیم بدانیم این عدد چقدر از ۱۹ بیشتر است پس:

$$\frac{۲۸۹}{۱۵} - ۱۹ = \frac{۲۸۹ - ۲۸۵}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$$

۱۸ - گزینه ۴

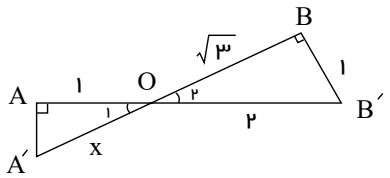


$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABH}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۱}{۵} \rightarrow \begin{cases} S_{\overset{\Delta}{ABH}} = S \\ S_{\overset{\Delta}{AHC}} = ۴S \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{AHC} \text{ (زز)} \rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABH}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}} = k^{۲}$$

$$\rightarrow \frac{S}{۴S} = k^{۲} \rightarrow k = \frac{۱}{۲} \rightarrow \text{نسبت ارتفاع‌ها} = \frac{HH''}{HH'} = k = \frac{۱}{۲}$$

۱۹ - گزینه ۲ ابتدا با رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی OB را بدست می‌آوریم.

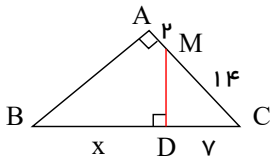


$$OB=\sqrt{۴-۱}=\sqrt{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱=\hat{O}_۲\\ \hat{A}=\hat{B}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AOA'}\sim\overset{\Delta}{OBB'}\Rightarrow \overset{\Delta}{OBB'}$$

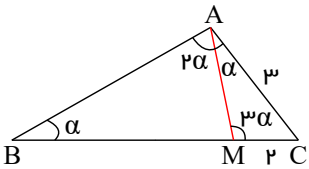
$$\Rightarrow\frac{AA'}{BB'}=\frac{A'O}{OB'}=\frac{AO}{OB}\Rightarrow\frac{x}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow x=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۰ - گزینه ۴



$$\left.\begin{array}{l}\hat{C}=\hat{C}\\ \hat{D}=\hat{A}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{MDC}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{DC}{AC}=\frac{MC}{BC}\Rightarrow\frac{۷}{۱۶}=\frac{۱۴}{۷+x}\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}=\frac{۲}{۷+x}\Rightarrow ۷+x+۳۲\Rightarrow x=۲۵$$

۲۱ - گزینه ۱ مطابق شکل، $A\hat{M}C$ زاویه‌ی خارجی مثلث ABM است و در نتیجه:



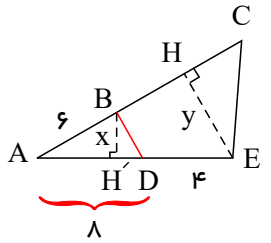
$$A\hat{M}C=\alpha+۲\alpha=۳\alpha$$

دو مثلث AMC و ABC به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و داریم:

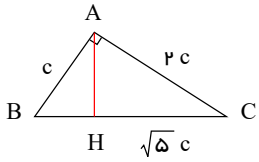
$$\frac{MC}{AC}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۳}{BM+۲}\Rightarrow BM=۲/۵$$

۲۲ - گزینه ۱ باتوجه به شکل، دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH' و AEH به علت برابری یک زاویه‌ی حادّه (زاویه‌ی $\hat{A}$) متشابه هستند. حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{BH'}{EH}=\frac{AB}{AE}\rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۶}{۸+۴}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

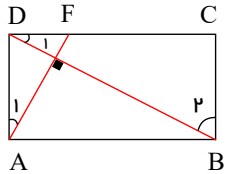


۲۳ - گزینه ۳ بنابر قضیه‌ی فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC=\sqrt{۵}c$ ، داریم:



$$\Delta ABH\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}}=(\frac{BC}{AB})^۲=(\frac{\sqrt{۵}c}{c})^۲=۵$$

۲۴ - گزینه ۲ $\Delta ADF\sim\Delta DBC$ زیرا دو زاویه مساوی دارند.



$$\left\{\begin{array}{l}\angle D=\angle C=۹۰^\circ\\ \angle D_۱=\angle A_۱\end{array}\right.\Rightarrow \overset{\Delta}{ADF}\sim\overset{\Delta}{DBC}$$

$$\Rightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{DF}{BC}=\frac{AF}{DB}\Rightarrow\frac{AD}{۳AD}=\frac{DF}{\frac{۱}{۳}AB}$$

پس $DF=\frac{۱}{۹}AB$ و $AB=۹DF$ بنابراین $DC=۹DF$

نکته: اگر طول مستطیل K برابر عرض مستطیل بود، $DC=K^۲DF$ است.

۲۵ - گزینه ۲

چون دو مثلث قابل انطباق نمی‌باشند یعنی دو مثلث مساوی نیستند و در نتیجه در دو مثلث، اضلاع به طول ۳ نمی‌توانند متشابه باشند اگر فرض کنیم $a>b$ است یکی از این دو حالت رخ می‌دهد.

$$\frac{۳}{۴}=\frac{a}{۵}=\frac{b}{۳}\rightarrow a=\frac{۱۵}{۴},b=\frac{۹}{۴}\rightarrow \text{محیط}=۳+\frac{۹}{۴}+\frac{۱۵}{۴}=۹$$

$$\frac{۳}{۵}=\frac{a}{۴}=\frac{b}{۳}\rightarrow a=\frac{۱۲}{۵},b=\frac{۹}{۵}\rightarrow \text{محیط}=۳+\frac{۱۲}{۵}+\frac{۹}{۵}=۷/۲$$

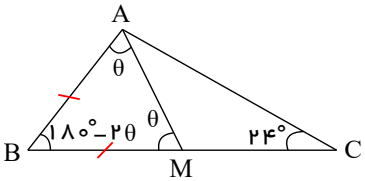
که بیشترین محیط برابر ۹ است.

۲۶ - گزینه ۳ اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر موازیند پس دو مثلث متشابه‌اند، بنابراین:

$$\frac{S}{S'}=\left(\frac{۷}{۱۷/۵}\right)^۲ \Rightarrow \frac{\frac{۴\times ۷}{۲}}{S'}=\left(\frac{۷}{\frac{۳۵}{۲}}\right)^۲ \Rightarrow S'=\frac{۱۷۵}{۲}=۸۷/۵$$

۲۷ - گزینه ۲ فرض می‌کنیم $A\hat{M}B=\theta$ ، چون $AB=BM$ ، پس $B\hat{A}M=\theta$ و در نتیجه:

$$\hat{B}=۱۸۰^\circ-۲\theta$$



طبق فرض، دو مثلث AMC و ABC متشابه‌اند، پس زوایای آن‌ها با هم برابرند و داریم:

$$M\hat{A}C=\hat{B}=۱۸۰^\circ-۲\theta$$

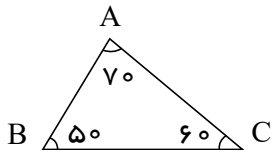
از طرفی $A\hat{M}C=۱۸۰^\circ-\theta$ که با نوشتن جمع زوایای داخلی در $\overset{\Delta}{AMC}$ داریم:

$$M\hat{A}C+A\hat{M}C+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۸۰^\circ-۲\theta+۱۸۰^\circ-\theta+۲۴^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\theta=۲۰۴^\circ \Rightarrow \theta=۶۸^\circ$$

۲۸ - گزینه ۱

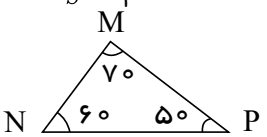
دو مثلث ABC و MNP متشابهند زیرا:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC}: A=۷۰, B=۵۰^\circ, \hat{C}=۶۰^\circ \\ \overset{\Delta}{MNP}: \hat{M}=۷۰, \hat{N}=۶۰, \hat{P}=۵۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{MNP}$$



از طرفی می‌دانیم $\frac{S}{S'}=\frac{۹}{۴}$ ، $\frac{S}{S'}=(\frac{AB}{MP})^۲$ داریم:

$$\frac{AB}{MP}=\sqrt{\frac{۹}{۴}} \Rightarrow \frac{۱۸}{MP}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow MP=۱۲$$



۲۹ - گزینه ۱

در دو مثلث متشابه اضلاع متناسب‌اند و نسبت مساحت‌ها برابر با توان دوم نسبت متشابه.

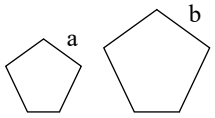
$$\frac{۹}{x-۲}=\frac{۱۲}{x} \Rightarrow ۹x=۱۲x-۲۴ \Rightarrow x=۸$$

$\frac{۴}{۹}=$ نسبت مساحت‌ها $\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹}=$ نسبت تشابه

۳۰ - گزینه ۲ هر دو پنج ضلعی منتظم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست، بنابراین:

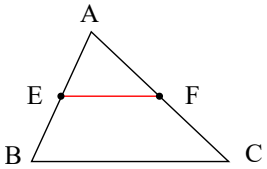
$$\frac{۴}{۹}=\left(\frac{a}{b}\right)^۲ \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}= \text{(نسبت تشابه)}$$

$$\frac{۶}{b}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow b=۹ \quad \text{یا} \quad \frac{a}{۶}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow a=۴$$



بستگی به اینکه اگر عدد ۶ اندازه‌ی ضلع کوچک‌تر باشد، ضلع پنج ضلعی بزرگ‌تر ۹ است یا اگر عدد ۶ عدد ضلع بزرگ‌تر باشد، ضلع پنج ضلعی کوچک‌تر ۴ است.

۳۱ - گزینه ۴ برای اینکه AEF و ABC متشابه باشند باید تناسب $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ برقرار باشد. در گزینه‌ی ۴ تناسب $\frac{۶}{۴}=\frac{۱۲}{۸}$ برقرار است ولی در مورد بقیه این تناسب برقرار نیست.



۳۲ - گزینه ۴ اگر وسط اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، مثلثی متشابه با مثلث بزرگتر به دست می‌آید که نسبت تشابه آنها $K=\frac{۱}{۲}$ است.

در دو مثلث متشابه با نسبت تشابه K، نسبت بین مساحت‌ها $K^۲$ (مربع نسبت تشابه) است.

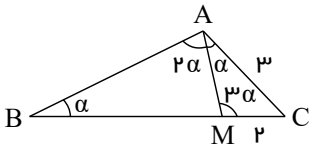
$$K=\frac{۱}{۲}\ \text{(نسبت تشابه)} \Rightarrow \frac{S}{S'}=K^۲=(\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow \frac{S_{HSN}}{S_{PRI}}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{S_{HSN}}{۱۲}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{HSN}=۳cm^۲$$

۳۳ - گزینه ۱ مطابق شکل، $A\hat{M}C$ زاویه‌ی خارجی مثلث ABM است و در نتیجه:

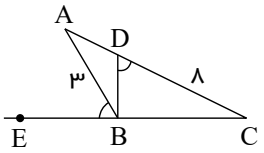
$$A\hat{M}C=\alpha+۲\alpha=۳\alpha$$

دو مثلث AMC و ABC به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{MC}{AC}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۳}{BM+۲}$$
$$\Rightarrow BM=۲/۵$$



۳۴ - گزینه ۱ در شکل مقدار AD را x تعریف می‌کنیم.



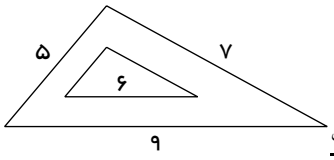
$$A\hat{B}E = B\hat{D}C \xrightarrow{\text{قضیه‌ی زوایای مکمل}} A\hat{B}C = A\hat{D}B$$

$$\overset{\Delta}{AB}C, \overset{\Delta}{AB}D : \begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ A\hat{B}C = A\hat{D}B \end{cases} \xrightarrow{(\text{زز})} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{x} = \frac{x+۸}{۳} \Rightarrow x^۲ + ۸x - ۹ = ۰$$

$$(x+۹)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۹ \ \text{غیر قابل قبول} \\ x = ۱ \end{cases}$$

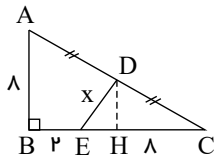
۳۵ - گزینه ۳ دو مثلث با یکدیگر متشابه هستند و اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر را S و مساحت مثلث کوچک‌تر را S' بنامیم، داریم:



$$\rightarrow \frac{S}{S'} = \underbrace{K^۲}_{\text{نسبت تشابه}} \rightarrow \frac{S}{S'} = (\frac{۹}{۶})^۲ = \frac{۹}{۴}$$

$$\frac{\text{مساحت محدود به دو مثلث}}{\text{مساحت مثلث کوچک‌تر}} = \frac{S-S'}{S'} \xlongequal{\text{تفکیک}} \frac{S}{S'} - ۱ = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

۳۶ - گزینه ۴ از D بر BC عمود می‌کنیم. داریم:



$$DH \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{DC}{AC} = \frac{CH}{CB} = \frac{DH}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{CH}{۱۰} = \frac{DH}{۸}$$

$$CH = ۵, \ DH = ۴$$

حال:

$$BH = BC - CH$$

$$= ۱۰ - ۵ = ۵ \Rightarrow EH = ۳$$

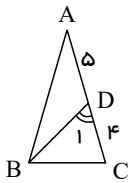
$$\overset{\Delta}{DEH} : x^۲ = DH^۲ + EH^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۳۷ - گزینه ۲

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ BC = BD \rightarrow \hat{C} = \hat{D}_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_۱$$

با توجه به اطلاعات حاصل از مرحله اول می‌توان تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{AB}C$ و $\overset{\Delta}{BC}D$ را ثابت کرد.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D}_۱ \\ \hat{C} = \hat{C} \ \text{مشترک} \end{array}\right\} \overset{\Delta}{AB}C \sim \overset{\Delta}{BC}D \rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD}$$

$$\frac{۹}{BC} = \frac{BC}{۴} \rightarrow BC^۲ = ۳۶ \rightarrow BC = ۶ \rightarrow BD = BC = ۶$$

پس محیط مثلث $\overset{\Delta}{BC}D$ برابر است با:

$$BC + BD + DC = ۶ + ۶ + ۴ = ۱۶$$

۳۸ - گزینه ۴ اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد نسبت محیط‌های آنها هم k و نسبت مساحت‌ها $k^۲$ خواهد بود.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_۱}{P_۲} = k \\ \frac{S_۱}{S_۲} = k^۲ \end{array}\right\} \frac{S_۱}{S_۲} = (\frac{P_۱}{P_۲})^۲ \rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{P_۱^۲}{P_۲^۲} \rightarrow S_۱P_۲^۲ = S_۲ \cdot P_۱^۲$$

۳۹ - گزینه ۱ چون $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و AH ارتفاع است، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه خواهیم داشت:

$$AH^۲ = BH \times CH \Rightarrow ۱۴۴ = xy(*)$$

$$\overset{\Delta}{AB}H \ \text{قضیه فیثاغورس در} : x^۲ + ۱۴۴ = ۴۰۰ \Rightarrow x^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow \boxed{x = ۱۶}$$

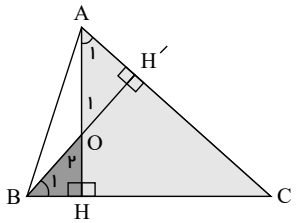
$$۱۴۴ = xy \xrightarrow{x=۱۶} \boxed{y = ۹}$$
$$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow z^۲ = y(x+y) = xy + y^۲$$
$$= ۱۴۴ + ۸۱ = ۲۲۵ \Rightarrow \boxed{z = ۱۵} \Rightarrow x + y + z = ۱۶ + ۹ + ۱۵ = ۴۰$$

۴۰ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_۱ + \hat{O}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{A}_۱ + \hat{O}_۱ = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲} \hat{B}_۱ = \hat{A}_۱$$

پس مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AHC و OHB متشابه‌اند.

$$\frac{HC}{OH} = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \frac{۱۲}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{BH} \Rightarrow BH = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵$$



۴۱ - گزینه ۲ چون بیشترین مقدار ممکن برای عدد a را می‌خواهیم، لذا a با بزرگ‌ترین ضلع از مثلث دوم متناسب است. حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$b < ۷ < ۹ \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۵}{۷} = \frac{۴}{b} \Rightarrow a = \frac{۴۵}{۷}, b = \frac{۲۸}{۵}$$
$$۷ < b < ۹ \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۵}{b} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow a = \frac{۳۶}{۷}, b = \frac{۳۵}{۴}$$
$$۷ < ۹ < b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

بنابراین بیشترین مقدار a برابر با $\frac{۴۵}{۷}$ می‌باشد.

۴۲ - گزینه ۲

در هر دو مثلث اضلاع متناسب هستند.

$$\frac{۲}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{\sqrt{۶}}{۳\sqrt{۲}}$$

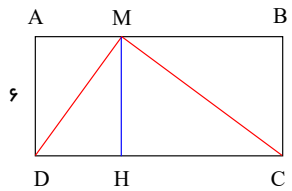
پس دو مثلث متشابه‌اند. نسبت مساحت‌ها برابر با مربع نسبت تشابه است.

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{۲}{۲\sqrt{۳}}\right)^۲ = \frac{۱}{۳}$$

۴۳ - گزینه ۱

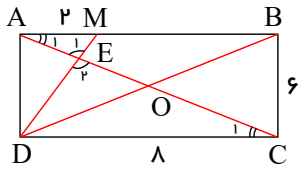
ارتفاع MH در مثلث قائم الزاویه DMC را رسم می‌کنیم. بنابر رابطه‌ی طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:

$$MH^۲ = DH \times CH \Rightarrow ۶^۲ = AM \times MB \Rightarrow AM \times MB = ۳۶$$



۴۴ - گزینه ۱

$$AC^۲ = AD^۲ + DC^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰۰$$
$$\rightarrow AC = ۱۰ \ , \ AO = OC = ۵$$



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \ , \ AC = \text{مورب} \rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \\ \text{(متقابل به رأس)}\ \hat{E}_۱ = \hat{E}_۲ \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{AME} \sim \overset{\Delta}{EDC}$$

$$\rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{۲}{۸} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{۲}{۸} = \frac{AO - EO}{OC + EO} \rightarrow \frac{۲}{۸} = \frac{۵ - EO}{۵ + EO}$$

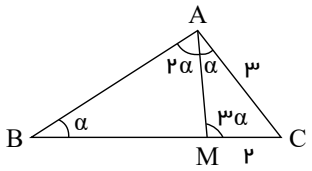
$$\rightarrow ۱۰ + ۲EO = ۴۰ - ۸EO \rightarrow ۱۰EO = ۳ \rightarrow EO = ۳$$

۴۵ - گزینه ۱ مطابق شکل، $A\hat{M}C$ زاویه خارجی مثلث ABM است و در نتیجه:

$$A\hat{M}C = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha$$

دو مثلث AMC و ABC به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و داریم:

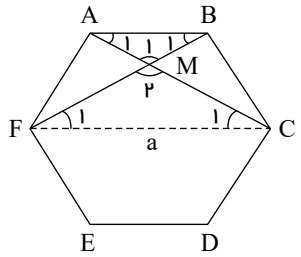
$$\frac{MC}{AC}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۳}{BM+۲}\Rightarrow BM=۲/۵$$



۴۶ - گزینه ۱ مطابق شکل مقابل، فرض می‌کنیم دو قطر کوچک در نقطه‌ی M متقاطع‌اند، قطر بزرگ CF که طول آن دو برابر طول ضلع شش ضلعی منتظم است را رسم می‌کنیم. داریم:

$$CF\parallel AB\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}_۱=\hat{A}_۱\\ \hat{F}_۱=\hat{B}_۱\\ \hat{M}_۲=\hat{M}_۱\end{cases}\Rightarrow M\overset{\Delta}{A}B\sim M\overset{\Delta}{C}F\Rightarrow\frac{MA}{MC}=\frac{AB}{CF}$$

$$=\frac{a}{۲a}=\frac{۱}{۲}$$

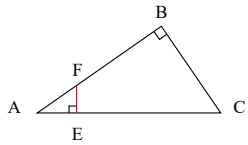


۴۷ - گزینه ۳

$$A\overset{\Delta}{B}C\ :\ AC^۲=BC^۲+AB^۲\Rightarrow AB=۸$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}=\hat{A}\\ \hat{E}=\hat{B}=۹۰^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\overset{\Delta}{E}F\sim A\overset{\Delta}{B}C\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}$$

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}\Rightarrow\frac{۲}{۸}=\frac{AF}{۱۰}\Rightarrow AF=۲/۵$$

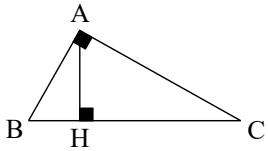


۴۸ - گزینه ۱ فاصله‌ی A تا ضلع BC (یعنی طول ارتفاع) را h و فاصله‌ی A تا ضلع MN را h' می‌نامیم. دو مثلث ABC و AMN متشابه هستند. (به حال تساوی دو زاویه)، پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}=\left(\frac{h}{h'}\right)^۲\Rightarrow ۳=\frac{۳۶}{h'^۲}\Rightarrow h'^۲=۱۲\Rightarrow h'=۲\sqrt{۳}$$

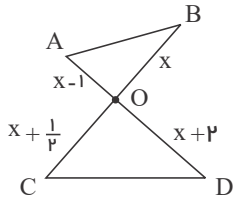
۴۹ - گزینه ۴ مثلث‌های ABC، ABH و AHC همگی متشابه هستند و نسبت تشابه مثلث AHC و AHB برابر $\frac{AC}{AB}=\frac{۱}{۰/۶}=\frac{۵}{۳}$ است. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با $\frac{S_{AHC}}{S_{AHB}}=\frac{۲۵}{۹}$. اگر فرض کنیم، $S_{AHB}=۹x$ و $S_{AHC}=۲۵x$ آنگاه $S_{ABC}=۳۴x$، پس:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AHC}}=\frac{۳۴x}{۲۵x}=\frac{۳۴}{۲۵}$$



۵۰ - گزینه ۴ با توجه به عدم موازی بودن اضلاع AB و CD و متشابه بودن دو مثلث باید نسبت تشابه به شکل زیر برقرار باشد.

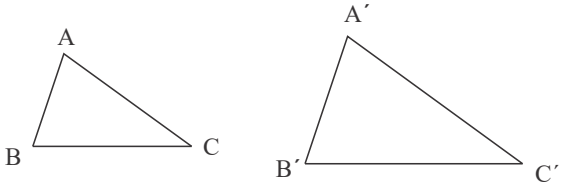
$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}\to\frac{x-۱}{x+\frac{۱}{۲}}=\frac{x}{x+۲}=\frac{y}{۹}$$



$$(I)\quad x^۲+x-۲=x^۲+\frac{۱}{۲}x\to x-۲=\frac{۱}{۲}x\to\frac{۱}{۲}x=۲\to\boxed{x=۴}$$

$$(II)\to\frac{۴}{۶}=\frac{y}{۹}\to\boxed{y=۶}$$

۵۱ - گزینه ۳



$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^{۲} \to k^{۲} = \frac{۹}{۱۶} \to k = \frac{۳}{۴}$$ نسبت تشابه

با توجه به تصویر می‌توان نوشت:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{۳}{۴} \to \frac{۷}{B'C'} = \frac{۳}{۴} \to ۳B'C' = ۲۸ \to B'C' = \frac{۲۸}{۳}$$ ضلع بزرگ مثلث دوم

حال نسبت ضلع کوچکتر به بزرگتر را در مثلث $A'B'C'$ می‌نویسیم:

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{۲}{۳} \to \frac{A'B'}{\frac{۲۸}{۳}} = \frac{۲}{۳} \to A'B' = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲۸}{۳} = \frac{۵۶}{۹}$$

۵۲ - گزینه ۳ با توجه به متشابه بودن دو مثلث، اضلاع دو مثلث هم متناسب هستند. با توجه به طول اضلاع دو مثلث نسبت‌های $\frac{۳}{۵} \neq \frac{۴}{۶}$ و نسبت $\frac{۳}{۶} \neq \frac{۴}{۵}$ برقرار نمی‌باشد پس a و b متناظر نمی‌باشند. لذا می‌توان حالات زیر را برای تناسب اضلاع در نظر گرفت:

$$(۱)\ \frac{۳}{b} = \frac{۴}{۶} = \frac{a}{۵} \qquad (۲)\ \frac{۳}{b} = \frac{۴}{۵} = \frac{a}{۶}$$

$$(۳)\ \frac{۳}{۵} = \frac{۴}{b} = \frac{a}{۶} \qquad (۴)\ \frac{۳}{۶} = \frac{۴}{b} = \frac{a}{۵}$$

در نتیجه ۴ حالت وجود دارد.

۵۳ - گزینه ۴ محیط دو مثلث را P و P' در نظر بگیریم لذا داریم:

$$\begin{cases} \frac{P}{P'} = \frac{۲}{۵} \\ P' = P + ۱۵ \end{cases} \to \frac{P}{P+۱۵} = \frac{۲}{۵} \to ۵P = ۲P + ۳۰ \to ۳P = ۳۰ \to P = ۱۰$$

$$P' = P + ۱۵ = ۱۰ + ۱۵ = ۲۵ \to P + P' = ۲۵ + ۱۰ = ۳۵$$

۵۴ - گزینه ۱ با توجه به تشابه، در مثلث قائم‌الزاویه می‌توان اثبات کرد مربع هر ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با تصویر ضلع روی وتر در اندازهٔ وتر. پس می‌توان نوشت:

$$AB^{۲} = BH \times BD \to (۱۲)^{۲} = ۱۱(۱۱ + DH) \to ۱۴۴ = ۱۲۱ + ۱۱DH$$

$$DH = \frac{۱۴۴ - ۱۲۱}{۱۱} = \frac{۲۳}{۱۱}$$

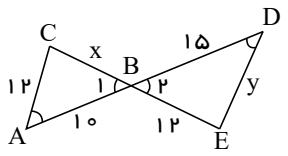
از طرفی ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی بین قطعات ایجاد شده روی وتر. لذا می‌توان نوشت:

$$AH^{۲} = DH \times BH$$

$$AH^{۲} = \frac{۲۳}{۱۱} \times ۱۱ \Rightarrow AH = \sqrt{۲۳}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ADH}} = \frac{۱}{۲} DH \times AH = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲۳}{۱۱} \times \sqrt{۲۳} = \frac{۲۳\sqrt{۲۳}}{۱۱}$$

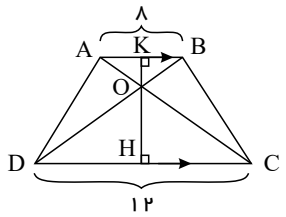
۵۵ - گزینه ۴



$$\begin{cases} \hat{B}_{۱} = \hat{B}_{۲} \\ \hat{A} = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{(\text{زز})} \overset{\triangle}{AB}C \sim \overset{\triangle}{DB}E \Rightarrow \frac{y}{۱۲} = \frac{۱۲}{x} = \frac{۱۵}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{۱۲} = \frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱۲}{x} = \frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲y = ۳۶ \Rightarrow y = ۱۸ \\ ۳x = ۲۴ \Rightarrow x = ۸ \end{cases} \Rightarrow x + y = ۱۸ + ۸ = ۲۶$$

۵۶ - گزینه ۱



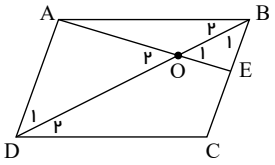
$$HK = ۱۵ \ , \ AB||CD \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \sim \overset{\triangle}{OCD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{OK}{OH} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow OK = ۲x \ , \ OH = ۳x$$

$$\Rightarrow KH = ۵x = ۱۵ \rightarrow x = ۳ \Rightarrow OH = ۹ \ , \ OK = ۶$$

۵۷ - گزینه ۳

با استفاده از خواص خطوط موازی و مورب داریم:



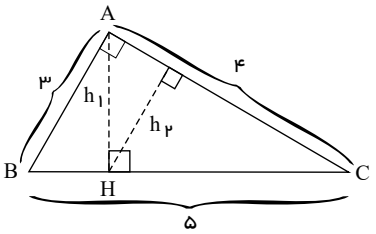
$$AD||BE \xrightarrow{\text{مورب } DB} \left.\begin{matrix} \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{OBE} \sim \overset{\triangle}{OAD}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{OBE}}{S_{OAD}} = (\frac{BE}{AD})^۲ = \frac{۴}{۱۲۱} \Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{۲}{۱۱}$$

در متوازی‌الاضلاع داریم: $AD = BC$، بنابراین:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{۲}{۱۱} \Rightarrow \frac{BE}{BC - BE} = \frac{۲}{۱۱ - ۲} \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{۲}{۹}$$

۵۸ - گزینه ۲

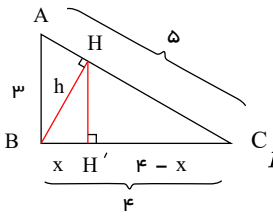


دو مثلث ABC و AHC متشابه هستند (دو زاویهٔ مساوی) بنابراین نسبت تشابه آن‌ها همان نسبت ارتفاع‌ها است.

$$k = \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{BC}{AC} = \frac{۵}{۴} \rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{۴}{۵}$$

۵۹ - گزینه ۴

وتر AC در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC به کمک رابطه‌ی فیثاغورس بدست می‌آید.



$$AC = \sqrt{۲^۲ + ۴^۲} = ۵$$

از طرفی داریم:

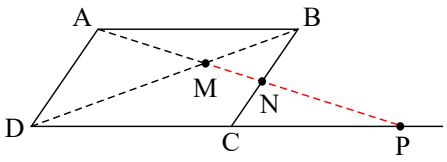
$$BH \times AC = AB \times BC \Rightarrow ۵h = ۳ \times ۴ \Rightarrow h = \frac{۱۲}{۵}$$

یا ارتفاع وارد بر وتر $= \frac{\text{ضرب دو ضلع قائم}}{\text{وتر}} = \frac{۳ \times ۴}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$

$$\overset{\triangle}{BHC} : BH^۲ = BH' \times BC \Rightarrow (\frac{۱۲}{۵})^۲ = ۴x \Rightarrow x = \frac{۳۶}{۲۵} = ۱٫۴۴$$

۶۰ - گزینه ۴

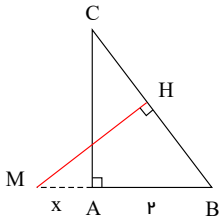
از قضیه تالس به صورت زیر استفاده می‌کنیم.



$$\left.\begin{matrix} BN(||AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{AM} = \frac{BM}{MD} \\ AB||DP \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BM}{MD} = \frac{AM}{MP} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{MP}$$

$$\Rightarrow AM^۲ = MN \times MP$$

۶۱ - گزینه ۲

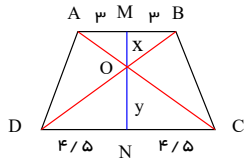


$$BC^{۲} = ۳۶ + ۴ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۰} \Rightarrow BH = CH = \sqrt{۱۰}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \angle H = \angle A = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{BMH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} = \frac{X+۲}{۲\sqrt{۱۰}} \Rightarrow X = ۸$$

۶۲ - گزینه ۳

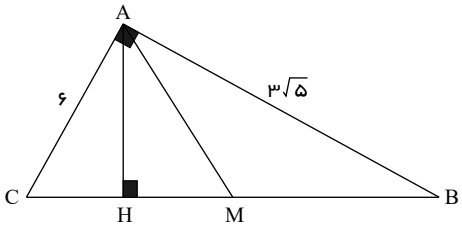
خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند از نقطه‌ی تلاقی دو قطر می‌گذرد.



$$\overset{\Delta}{OMB} \sim \overset{\Delta}{OND} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۳}{۴/۵} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{x}{\underbrace{x+y}_{۱۲}} = \frac{۳}{۷/۵} \to x = ۴/۸$$

۶۳ - گزینه ۴

ابتدا شکل مسأله را رسم می‌کنیم:

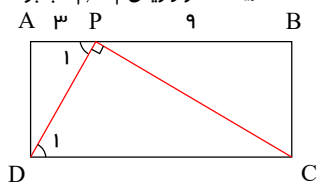


$$\overset{\Delta}{ABC} : (AC)^{۲} + (AB)^{۲} = (BC)^{۲} \to ۳۶ + ۴۵ = (BC)^{۲} \to ۸۱ = (BC)^{۲} \to BC = ۹ \to BM = CM = ۴/۵$$

می دانیم : $(AB)^{۲} = BH \cdot BC \to ۴۵ = ۹BH \to BH = ۵ \to MH = ۰/۵$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{(\frac{۱}{۲})(h)(BC)}{(\frac{۱}{۲})(h)(MH)} = \frac{۹}{۰/۵} = ۱۸$$

۶۴ - گزینه ۴ دو زاویه‌ی $\hat{P}_۱, \hat{D}_۱$ بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب مساوی‌اند. پس دو مثلث قائم الزاویه ADP , PDC متشابه‌اند.



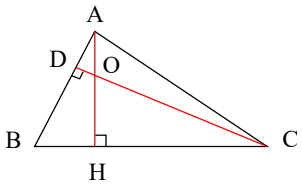
$$\overset{\Delta}{APD} \sim \overset{\Delta}{DPC} \Rightarrow \frac{DP}{DC} = \frac{AP}{DP} \Rightarrow DP^{۲} = AP \cdot DC = ۱۲ \times ۳ = ۳۶ \Rightarrow PD = ۶$$

روش دوم: بنابر استدلال روش قبل در مثلث قائم الزاویه DPC می‌توان گفت مربع یک ضلع برابر است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر.

اندازه‌ی AP با اندازه‌ی تصویر PD بر وتر برابر است، بنابراین:

$$PD^{۲} = AP \times DC = ۱۲ \times ۳ = ۳۶ \to \ PD = ۶$$

۶۵ - گزینه ۴ در مثلث قائم الزاویه‌ی AOD و HOC دو زاویه مساوی دارند پس متشابه‌اند.

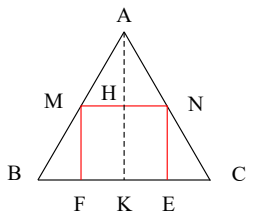


$$\Delta ADO \sim \Delta HOC \Rightarrow \frac{OH}{OD} = \frac{HC}{AD} = \frac{OC}{OD}$$

$$\Rightarrow \frac{۳۶}{\frac{۱۲}{۵}} = \frac{HC}{۱۲} \Rightarrow HC = ۵ \times ۳۶ = ۱۸۰$$

۶۶ - گزینه ۲ مطابق شکل ارتفاع AK را رسم کرده داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AH}{AK}$$



اگر طول ضلع مربع را x فرض کنیم با توجه به اینکه در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a طول ارتفاع $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است، پس:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AH}{AK} \Rightarrow \frac{x}{۱} = \frac{AK - HK}{AK} \Rightarrow x = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲} - x}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - x \Rightarrow x\left(\sqrt{۳} + ۲\right) = \sqrt{۳}$$

$$x = \frac{\sqrt{۳}}{۲ + \sqrt{۳}} \times \frac{۲ - \sqrt{۳}}{۲ - \sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

۶۷ - گزینه ۱

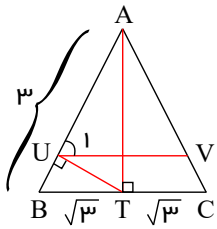
بنابر رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\overset{\Delta}{ABT} : BT^۲ = BU \cdot BA \;\Rightarrow\; BU = \frac{(\sqrt{۳})^۲}{۳} = ۱$$

$$\Rightarrow\; AU = AB - BU = ۳ - ۱ = ۲$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \underbrace{\hat{U}_۱ = \hat{B}}_{UV \parallel BC} \end{cases} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \overset{\Delta}{AUV} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\Rightarrow\; \frac{S_{AUV}}{S_{ABC}} = (\frac{AU}{AB})^۲ = (\frac{۲}{۳})^۲ = \frac{۴}{۹}$$



۶۸ - گزینه ۴

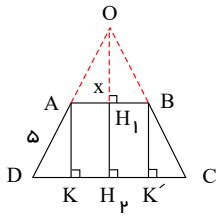
$$BC^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEB} \Rightarrow \frac{y}{۳} = \frac{۴ - x}{۵} = \frac{۲}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۲y = ۳ \Rightarrow y = \frac{۳}{۲} \\ ۸ - ۲x = ۵ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$x \cdot y = \frac{۳}{۲} \times \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۶۹ - گزینه ۲ اگر ارتفاع‌های AK و BK' را رسم کنیم آنگاه دو مثلث قائم الزاویه ADK و $BK'C$ همنهشت می‌شوند پس $DK = K'C$ داریم:

$$DK = \frac{CD - AB}{۲} = \frac{۱۵ - ۹}{۲} = ۳$$



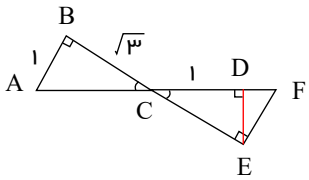
در مثلث قائم‌الزاویه‌ی DAK داریم:

فیثاغورس : $AK = \sqrt{AD^۲ - DK^۲} = \sqrt{۲۵ - ۹} = ۴ \Rightarrow H_۱H_۲ = ۴$

از طرفی $AB \parallel DC$ است پس در مثلث تالس می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{ODH_۲} : \frac{OH_۱}{OH_۲} = \frac{AH_۱}{DH_۲} \Rightarrow \frac{x}{x + ۴} = \frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۱۵}{۲}} \Rightarrow ۵x = ۳x + ۱۲ \Rightarrow x = ۶$$

۷۰ - گزینه ۲



$$\overset{\Delta}{ABC}: ۱^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = AC^۲ \Rightarrow AC = ۲$$

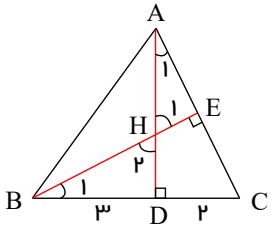
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{CDE} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{DE} = \frac{۲}{CE} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} \Rightarrow CE = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \ , \ DE = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \ (*)$$

$$\overset{\Delta}{CEF}: CE^۲ = CD \cdot CF \xrightarrow{(*)} (\frac{۲}{\sqrt{۳}})^۲ = ۱ \times CF \Rightarrow CF = \frac{۴}{۳}$$

$$S_{CEF} = \frac{۱}{۲} DE \times CF = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{۴}{۳} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$$

۷۱ - گزینه ۳ باتوجه به شکل مقابل مثلث‌های BDH و ADC متشابهند، زیرا:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AHE}: \hat{A}_۱ + \hat{H}_۱ = ۹۰^\circ \\ \overset{\Delta}{ADC} = \hat{A}_۱ + \hat{C} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{H}_۱ = \hat{C} \quad (۱)$$

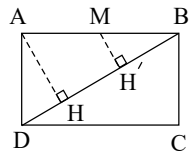
از آن‌جایی که $\hat{H}_۲$ و $\hat{H}_۱$ متقابل به رأس می‌باشند، از (۱) داریم، $\hat{H}_۲ = \hat{C}$ و هم‌چنین زاویه‌ی D در این دو مثلث برابر ۹۰° است، لذا باتوجه به رابطه‌ی نسبت تشابه در این دو مثلث داریم:

$$\frac{DC}{DH} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BH} \Rightarrow \frac{۲}{DH} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow DH = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

۷۲ - گزینه ۲

نقطه‌ی وسط AB را M می‌نامیم، بنابر داده‌های مسئله $MH' = ۲\sqrt{۳}$ و چون دو مثلث $MH'B$ و ABH متشابه‌اند، پس:

$$\frac{MH'}{AH} = \frac{MB}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AH = ۴\sqrt{۳}$$



ولی در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی دو قطعه‌ی پدید آمده روی وتر است، در نتیجه داریم:

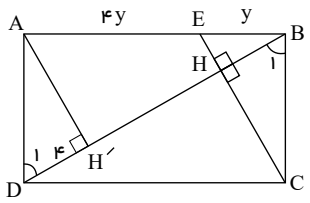
$$AH^۲ = DH \cdot HB \Rightarrow (۴\sqrt{۳})^۲ = DH \times ۳DH$$

$$\Rightarrow ۳DH^۲ = ۴۸ \Rightarrow DH = ۴$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{AH^۲ + DH^۲} = \sqrt{(۴\sqrt{۳})^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

۷۳ - گزینه ۲

خطوط موازی و مورب: $\hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$



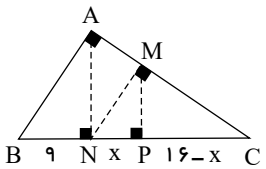
$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \\ AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AH'D} \cong \overset{\Delta}{BHC} \Rightarrow BH = DH' = ۴$$

$$\left.\begin{array}{l} AH' \perp BD \\ EH \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow AH' || EH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BH}{HH'} = \frac{y}{۴y} \Rightarrow \frac{۴}{HH'} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow HH' = ۱۶$$

$$CH^۲ = BH \times DH \Rightarrow CH^۲ = ۴ \times ۲۰ \Rightarrow CH = ۴\sqrt{۵}$$

$$S_{CHD} = \frac{۱}{۲} \times CH \times DH = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۵} \times ۲۰ = ۴۰\sqrt{۵}$$

۷۴ - گزینه ۳ MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم می‌باشند.



$$\overset{\Delta}{ABC} : MN \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NP} = \frac{۱۶}{۹} \quad (I)$$

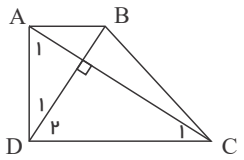
$$\overset{\Delta}{ACN} : MP \parallel AN \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CP}{PN} = \frac{۱۶-x}{x} \quad (II)$$

$$I, II \xrightarrow{\text{نسبت } \frac{CM}{MA} \text{ در هر دو تناسب وجود دارد}} \frac{۱۶}{۹} = \frac{۱۶-x}{x} \to ۱۶x = ۱۴۴ - ۹x \to ۲۵x = ۱۴۴$$

$$\to x = \frac{۱۴۴}{۲۵} = \frac{۵۷۶}{۱۰۰} = ۵/۷۶$$

۷۵ - گزینه ۲

ابتدا رئوس ذوزنقه را نام‌گذاری می‌نماییم. با توجه به تصویر برای محاسبهٔ اندازهٔ ساق قائم باید به دنبال دو مثلث متشابه بگردیم.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_۲ + \hat{D}_۱ = ۹۰ \\ \hat{D}_۲ + \hat{C}_۱ = ۹۰\end{array}\right\} \to \hat{D}_۱ = \hat{C}_۱$$

حال در دو مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ داریم:

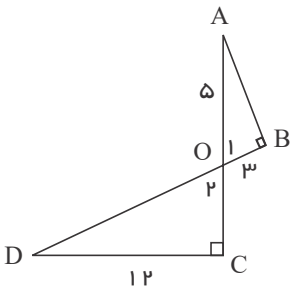
$$\begin{cases}\hat{C}_۱ = \hat{D}_۱ \\ \hat{A} = \hat{D} = ۹۰^\circ\end{cases} \xrightarrow{(\text{ز-ز})} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{ADC}$$

نوشتن نسبت اضلاع متناظر مرحلهٔ بعدی حل می‌باشد:

$$\underset{\hat{C}_۱,\hat{D}_۱}{\underset{\text{روبه‌روی}}{\frac{AB}{AD}}} = \underset{\hat{A},\hat{B}}{\underset{\text{روبه‌روی}}{\frac{AD}{CD}}} \to AD^۲ = AB \times CD \to AD^۲ = ۴ \times ۹ = ۳۶ \qquad AD = ۶$$

۷۶ - گزینه ۳

ابتدا با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث اجزای مثلث $\overset{\Delta}{OBA}$ را تعیین می‌نماییم.



$$AB^۲ + ۳^۲ = ۵^۲ \to AB^۲ = ۱۶ \to AB = ۴$$

با توجه به تساوی زوایای زیر دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{ODC}$ متشابه هستند.

$$\begin{cases}\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \quad \text{متقابل به رأس} \\ \hat{C} = \hat{B} = ۹۰\end{cases}$$

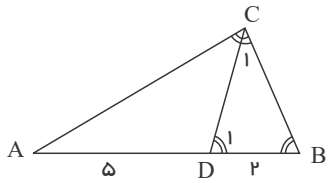
در این مرحله باید نسبت تشابه را محاسبه نمائیم.

$$k = \underset{\hat{A} \text{ و } \hat{D}}{\underset{\text{روبه‌روی}}{\frac{OC}{OB}}} = \underset{\hat{O}_۲,\hat{O}_۱}{\underset{\text{روبه‌روی}}{\frac{CD}{AB}}} = \underset{\text{وتر}}{\underset{\downarrow}{\frac{OD}{OA}}} \to k = \frac{۱۲}{۴} = ۳$$

اما باید توجه داشت نسبت مساحت‌ها $k^۲$ می‌باشد. یعنی:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ODC}}}{S_{\overset{\Delta}{OAB}}} = k^۲ = ۳^۲ = ۹$$

۷۷ - گزینه ۲ با توجه به اضلاع برابر مطرح شده در متن سوال داریم:

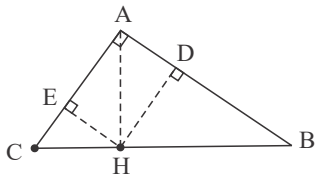


$$\begin{cases} AB = AC \to \hat{B} = \hat{C} \\ BC = DC \to \hat{B} = \hat{D}_۱ \end{cases} \to \hat{C} = \hat{D}_۱$$

با توجه به تساوی زوایای مطرح شده دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{CDB}$ متشابه می‌باشند و می‌توان نسبت تناسب اضلاع را به شکل زیر نوشت:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{رویه‌روی} \\ \hat{C},\hat{B}}}{\frac{AB}{DC}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{رویه‌روی} \\ \hat{C}_۱,\hat{A}}}{\frac{BC}{DB}} \xrightarrow{DC=BC} \frac{AB}{DC} = \frac{DC}{DB} \to DC^۲ = AB \times DB = ۷ \times ۲ = ۱۴$$

۷۸ - گزینه ۳



با توجه به توضیحات متن سوال می‌توان نوشت $\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = ۱/۸ = \frac{۱۸}{۱۰} = \frac{۹}{۵}$

می‌توان با استفاده از خواص نسبت تناسب نوشت:

$$\frac{S_{ABC} - S_{ABH}}{S_{ABH}} = \frac{۹ - ۵}{۵} \Rightarrow \frac{S_{AHC}}{S_{AHB}} = \frac{۴}{۵}$$

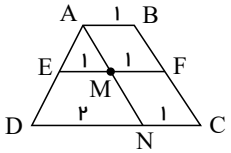
دو مثلث $\overset{\triangle}{AHC}$ و $\overset{\triangle}{AHB}$ به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند پس:

$$\frac{S_{AHC}}{S_{AHB}} = \frac{۴}{۵} = k^۲ \to k = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

هرگاه دو مثلث متشابه باشند، همه اجزای دو مثلث هم متناسب هستند پس دو ارتفاع هم متناسبند:

$$k = \frac{EH}{DH} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \to \frac{DH}{EH} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

۷۹ - گزینه ۴ مطابق شکل از نقطهٔ A خطی به موازات BC رسم می‌کنیم. مطابق شکل $ABCN$ متوازی‌الاضلاع است.



پس طول MF و NC برابر یک می‌باشد. طبق قضیهٔ تالس در مثلث ADN داریم:

$$EM||DN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AD} = \frac{EM}{DN} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD - AE} = \frac{۱}{۲ - ۱} = ۱ \Rightarrow \frac{AE}{ED} = ۱$$

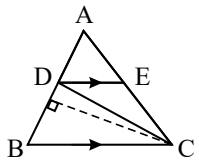
۸۰ - گزینه ۴ در دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ چون زاویهٔ A مشترک است و $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{۱}{۳}$ بنابراین:

$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE}$ (دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۲x + ۷} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳x = ۲x + ۷ \Rightarrow \boxed{x = ۷} \Rightarrow BC = ۲x + ۷ = ۱۴ + ۷ = ۲۱ \Rightarrow \boxed{BC = ۲۱}$$

۸۱ - گزینه ۴



$$\frac{DE}{BC} = \frac{۳}{۵}$$

$$DE||BC \Rightarrow \overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^۲ = \frac{۹}{۲۵}$$

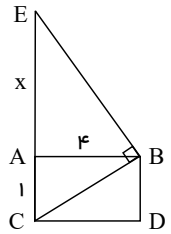
$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADE}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow S_{DECB} = (\frac{۲۵}{۲۵} - \frac{۹}{۲۵}) S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱۶}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$\Rightarrow S_{DECB} = \frac{۱۶}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \quad (۱)$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} CH \times AD}{\frac{۱}{۲} CH \times AB} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADC}} = \frac{۳}{۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{DECB}} = \frac{\frac{۳}{۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{\frac{۱۶}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

۸۲ - گزینه ۲



$$E\hat{B}C = \hat{A} = ۹۰^\circ \Rightarrow (۴)^۲ = AB^۲ = ۱ \times x \Rightarrow x = ۱۶ \Rightarrow CE = ۱ + ۱۶ = ۱۷$$

۸۳ - گزینه ۲

$$CD = \frac{۱}{۲} AD = \frac{۱}{۳} BC \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{۱}{۲} \ , \ CD = \frac{AD}{۲}$$

$$BD = BC + CD = ۳CD + CD = ۴CD = ۴ \times \frac{AD}{۲} = ۲AD \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{BD} = \frac{۱}{۲} \text{ و } \hat{D} \text{ مشترک} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{ACD} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD} \overset{(I)}{=\!=} \frac{۱}{۲}$$