پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ چون fog از درجهٔ اول است، پس f و g توابعی از درجهٔ اول هستند. اگر فرض کنیم $f(x)=ax+b$ خواهیم داشت:

$$f(x)+g(x)=۴ \Rightarrow g(x)=۴-ax-b$$

$$f(g(x))=۷-۴x \Rightarrow ag(x)+b=۷-۴x \Rightarrow a(۴-ax-b)+b=۷-۴x$$

$$\Rightarrow -a^۲x+۴a-ab+b=۷-۴x \Rightarrow \begin{cases} -a^۲=-۴ \Rightarrow a=\pm ۲ \\ ۴a-ab+b=۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} a=۲ \Rightarrow b=۱ \Rightarrow g(x)=-۲x+۳ \Rightarrow g(۲)=-۱ \\ a=-۲ \Rightarrow b=۵ \Rightarrow g(x)=۲x-۱ \Rightarrow g(۲)=۳ \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} ۲$$

۲ - گزینه ۴ با جمع کردن دو تابع $f+g$ و $f-g$ داریم:

$$(f+g)+(f-g)=۲f=\{(۳,۸),(۴,۸),(۵,۰)\}$$

پس $f=\{(۳,۴),(۴,۴),(۵,۰)\}$ پس این‌طور به‌نظر می‌رسد که:

$$\frac{۱}{f}=\{(۳,\frac{۱}{۴}),(۴,\frac{۱}{۴})\}$$

یعنی دامنهٔ آن شامل دو عدد است ولی با دقت بیش‌تر می‌توان فهمید که چون دامنه‌های $f+g$ و $f-g$ اشتراک دامنه‌های f و g هستند، دامنهٔ f شامل اعداد دیگری هم می‌تواند باشد که با دامنهٔ g مشترک نباشند. پس $\frac{۱}{f}$ هم می‌تواند شامل زوج‌های بیش‌تری باشد. به‌طور کلی می‌توان گفت چون دامنهٔ f مشخص نیست، پس دامنهٔ $\frac{۱}{f}$ مشخص نیست.

۳ - گزینه ۳

$fog(x)$ را تشکیل داده و بدون ساده کردنش دامنه را پیدا می‌کنیم.

$$fog(x)=\frac{\sqrt{۱-\tan^۲ x}}{\tan x}$$

$$\begin{cases} ۱-\tan^۲ x \geq ۰ \Rightarrow \tan^۲ x \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq \tan x \leq ۱ \Rightarrow -\frac{\pi}{۴} \leq x \leq \frac{\pi}{۴} \quad \text{(از روی دایره‌ی مثلثاتی)} \\ \tan x \neq ۰ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \neq ۰ \Rightarrow \sin x \neq ۰ \Rightarrow x \neq k\pi \Rightarrow x \neq ۰,\ \pi, ۲\pi, \cdots \end{cases}$$

$$D_{fog}=[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]-\{۰\}=[\frac{-\pi}{۴},۰)\cup(۰,\frac{\pi}{۴}]$$

۴ - گزینه ۴ روش اول:

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f , g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f: ۳-x \geq ۰ \to x \leq ۳$$

$$D_g: x^۲+۲x>۰ \to x(x+۲)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<-۲ \text{ یا } x>۰$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x<-۲ \text{ یا } x>۰\ ,\ \log_۲^{x^۲+۲x}\leq ۳\}$$

$$=\{x<-۲ \quad \text{یا} \quad x>۰\ ,\ x^۲+۲x\leq ۲^۳\}=\{x<-۲ \quad \text{یا} \quad x>۰\ ,\ x^۲+۲x-۸\leq ۰\}$$

$$=\{x<-۲ \quad \text{یا} \quad x>۰\ ,\ (x+۴)(x-۲)\leq ۰\}=\{x<-۲ \quad \text{یا} \quad x>۰\ ,\ -۴\leq x\leq ۲\}$$

$$=۴\leq x<-۲ \quad \text{یا} \quad ۰<x\leq ۲ \to [-۴,-۲)\cup(۰,۲]$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به‌دست آورید.

روش دوم:

۱- $x=-۱$: در دامنه‌ی تعریف g قرار ندارد بنابراین در دامنه‌ی تعریف fog هم نباید باشد یعنی هر گزینه‌ای که $x=-۱$ دارد نادرست است. پس فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

۵ - گزینه ۳ از روی شکل‌ها مشخص است که $D_f=[۰,۱]$ و $R_f=[۰,۲]$ و $D_g=[۱,۴]$ و $R_g=[۱,۳]$ است.

$$D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}=\{۰\leq x\leq ۱\ ,\ ۱\leq f(x)\leq ۴\}$$

$$=\{۰\leq x\leq ۱\ ,\ \frac{۱}{۳}\leq x\leq \frac{۲}{۳}\} \longrightarrow D_{gof}=[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}]$$

۶ - گزینه ۱ ریشه‌های تابع $f\cdot g$ برابر با ۳- و ۱ هستند، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $y=k(x-۱)(x+۳)$ است. این تابع از نقطهٔ $(۰,۶)$ می گذرد، پس:

$$۶=k(-۱)(۳) \Rightarrow k=-۲$$

پس ضابطهٔ $f\cdot g$ به‌صورت $(f\cdot g)(x)=-۲(x-۱)(x+۳)$ است.

از طرفی تابع f یک تابع خطی است که از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرد. ریشهٔ f با یکی از ریشه‌های $f\cdot g$ برابر است. چون ریشهٔ f عددی مثبت است، پس عدد ۱ ریشهٔ f است. بنابراین f از نقطهٔ $(۱,۰)$ نیز می‌گذرد. معادلهٔ f را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \\ B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.\end{cases} \quad \frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y-1}{x}=\frac{1}{-1}\to y=-x+1\to f(x)=-x+1$$

با داشتن ضابطهٔ f و $f\cdot g$، ضابطهٔ g را به‌دست می‌آوریم:

$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)\Rightarrow -2(x-1)(x+3)=-(x-1)\times g\Rightarrow g=2(x+3)=2x+6$$

ضابطهٔ $f+g$ برابر است با:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-x+1+2x+6=x+7$$

نمودار $f+g$ در گزینهٔ «۱» آمده است.

۷ ـ گزینه ۴

$$x=f(-1)=(-1)^3+2=-1+2=1$$

$$(2g-\frac{1}{2}f)(x)=(2g-\frac{1}{2}f)(1)=2g(1)-\frac{1}{2}f(1)$$

$$=2\times\sqrt{2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{1+3}=2\times(1)-\frac{1}{2}\times(2)=2-1=1$$

۸ ـ گزینه ۴

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$$

توجه کنید $D_f\cap D_g=\{-3,2,4\}$ است و چون $D_{\frac{f}{g}}$ فقط شامل ۲ و ۴ است پس حتماً $g(-3)=0$ است یعنی:

$$g(-3)=0\to n+2=0\to n=-2$$

اکنون تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f}{g}=\{(4,\frac{m}{1-n}),(2,\frac{1-n^2}{5})\}=\{(4,-5),(2,-\frac{3}{5})\}$$

$$\to\frac{m}{1-n}=-5\xrightarrow{n=-2}\frac{m}{3}=-5\to m=-15\to n-m=-2+15=13$$

۹ ـ گزینه ۱

با توجه به نمودار f و g داریم:

$$D_f=(-3,3)\ ,\ D_g=[-1,1]$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}\ ,\ D_f\cap D_g=[-1,1]$$

$$g(x)=0\Rightarrow -1\le x\le 1\ ,\ x\ne 0\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=[-1,1]-([-1,1]-\{0\})=\{0\}$$

دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ فقط شامل عدد صحیح $x=0$ است.

۱۰ ـ گزینه ۴

$$f(x)=3x+4\to f(g(x))=3g(x)+4$$

پس : $3g(x)+4=3x^2-6x-5\to 3g(x)=3x^2-6x-9$

$$\to g(x)=x^2-2x-3\to g(2)=4-4-3=-3$$

۱۱ ـ گزینه ۳

$$(fog)(x)=f(g(x))=3g(x)+5\ ,\ g(x)=t\Rightarrow f(t)=3t+5\Rightarrow f(x)=3x+5$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=9x^2+30x+26\Rightarrow g(3x+5)=9x^2+30x+25+1$$

$$\Rightarrow g(3x+5)=(3x+5)^2+1\Rightarrow g(x)=x^2+1$$

۱۲ ـ گزینه ۳

$$f(x)=|x|\ ,\ g(x)=(x+1)^2$$

$$fog(1-\sqrt{2})=f(g(1-\sqrt{2}))=f((1-\sqrt{2}+1)^2)=f((2-\sqrt{2})^2)=|(2-\sqrt{2})^2|$$

$$=(2-\sqrt{2})^2=4-4\sqrt{2}+2=6-4\sqrt{2}$$

$$gof(1-\sqrt{2})=g(f(1-\sqrt{2}))=g(\underbrace{|1-\sqrt{2}|}_{-})=g(-1+\sqrt{2})=(-1+\sqrt{2}+1)^2=2$$

پس داریم: $fog(1-\sqrt{2})-gof(1-\sqrt{2})=6-4\sqrt{2}-2=4-4\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})$

۱۳ - گزینه ۱ می‌توان نوشت:

$$(f+g)+(f-g)=۲f=\{(۱,۶),(۲,۸),(۳,۲),(۴,۴)\}$$
$$(f+g)-(f-g)=۲g=\{(۱,۴),(۲,۰),(۳,۲),(۴,۲)\}$$

لذا:

$$f=\{(۱,۳),(۲,۴),(۳,۱),(۴,۲)\}$$
$$g=\{(۱,۲),(۲,۰),(۳,۱),(۴,۱)\}$$

اما این فقط ظاهر قضیه است، $f+g$ و $f-g$ روی اشتراک دامنه‌های f و g تعریف شده است یعنی f و g به‌جز زوج‌های مرتب مشخص شده شاید زوج‌های مرتب دیگری را هم شامل باشند. یعنی f و g حداقل این ۴ زوج‌مرتب مشخص شده را دارند، در این حالت:

$$fog=\{(۱,۴),(۳,۳),(۴,۳)\}$$

یعنی fog حداقل شامل ۳ زوج‌مرتب است. در نتیجه تعداد اعضای fog نمی‌تواند ۲ باشد.

۱۴ - گزینه ۲ ابتدا تابع $y=(\frac{f}{g})(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+|x|}{|x+۱|+۱}$$

با توجه به تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ به ازای اعداد نامثبت (منفی و صفر)، صورت کسر صفر می‌شود بنابراین در این فاصله برد تابع عدد صفر است.

$$x\le ۰\Rightarrow\quad y=۰$$
$$x>۰\Rightarrow\quad y=\frac{x+x}{x+۱+۱}=\frac{۲x}{x+۲}$$

چون این یک تابع صعودی است ($f'>۰$) با جایگذاری ابتدا و انتهای دامنه، برد تابع محاسبه می‌شود.

$$\begin{matrix} x=۰\to f(۰)=۰ \\ x\to+\infty\Rightarrow y=۲\end{matrix}\Rightarrow R_f=[۰,۲)$$

و یا می‌توان گفت:

$$y=\frac{۲x}{x+۲}=۲-\frac{۴}{x+۲}$$
$$x<۰\Rightarrow x+۲<۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}<\frac{۱}{x+۲}<۰\Rightarrow ۰<۲-\frac{۴}{x+۲}\Rightarrow D_y=(۰,۲)\cup\{۰\}=[۰,۲]$$

۱۵ - گزینه ۳

$$f=\{\,(x,۲x-۱)\ ,\ x\in A\,\}\Rightarrow f=\{\,(۱,۱)(۲,۳)(۳,۵)(۴,۷)(۵,۹)\,\}$$

$$\left.\begin{matrix} f(f(x))=f(f(۱))=f(۱)=۱ \\ f(f(۲))=f(۳)=۵ \\ f(f(۳))=f(۵)=۹ \\ f(f(۴))=f(۷)=\varnothing \\ f(f(۵))=f(۹)=\varnothing \end{matrix}\right\}\to \text{شامل سه زوج مرتب است.}$$

۱۶ - گزینه ۲ ابتدا زوج مرتب $۲f$ و $۲f+g$ و fog را می‌یابیم.

برای محاسبه‌ی $۲f$ باید مؤلفه‌ی دوم f را در ۲ ضرب کنیم.

$$۲f=\{(۲,۲),(۱,۱۲),(۴,۱۲)\}$$

برای محاسبه‌ی $۲f+g$ باید زوج مرتب‌های $۲f$, g که مؤلفه‌ی اول برابر دارند، مؤلفه‌ی دوم آن‌ها را باهم جمع کنیم.

$$۲f+g=\{(۲,۶),(۱,۱۴)\}$$

برای محاسبه‌ی زوج مرتب fog، از تعریف تابع fog استفاده می‌کنیم.

$$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}$$
$$D_g\to g(x)\to f(x)$$
$$\left.\begin{matrix} ۱\to ۲\to ۱ \\ ۲\to ۴\to ۶ \\ ۶\to ۱\to ۶\end{matrix}\right\}\Rightarrow fog=\{(۱,۱),(۲,۶),(۶,۶)\}$$
$$\Rightarrow\frac{۲f+g}{fog}=\left\{(۱,\frac{۱۴}{۱}),(۲,\frac{۶}{۶})\right\}=\{(۱,۱۴),(۲,۱)\}$$

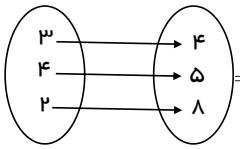
۱۷ - گزینه ۲

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$$

باتوجه به این‌که $۵\in D_{gof}$ است، پس ۵ باید زیرمجموعه‌ی D_f باشد، در نتیجه a باید برابر ۵ باشد و باتوجه به این‌که $۴\in D_f$ و $۴\in D_{gof}$ پس باید $f(۴)=۰$ متعلق به D_g باشد و این امکان فقط وقتی وجود دارد که $b=۰$ باشد.

$$b-۲a=۰-۲(۵)=-۱۰$$

۱۸ - گزینه ۳

f شرط تابع بودن $\Rightarrow a+۱=۴ \Rightarrow a=۳ \Rightarrow$ 

$\Rightarrow f=\{(۳,۴),(۴,۵),(۲,۸)\}$

$g=\{(x,۲x-۱)|x\in R_f\}=\{(۴,۷),(۵,۹),(۸,۱۵)\} \Rightarrow D_f\cap D_g=\{۴\}$
$(f+g)(۴)=f(۴)+g(۴)=۵+۷=۱۲$

۱۹ - گزینه ۴

$gof(a)=۱۵ \rightarrow g(f(a))=۱۵ \xrightarrow{f(a)=t} g(t)=۱۵$

$\rightarrow g(t)=۲f(t+۲)-۳=۱۵ \rightarrow ۲f(t+۲)=۱۸$

$\rightarrow f(t+۲)=۹ \xrightarrow{f(۶)=۹} t+۲=۶ \rightarrow t=۴$

پس: $f(a)=۴ \rightarrow a=۳$

۲۰ - گزینه ۲

$f(x)=x^۲-۲x+۱-۱=(x-۱)^۲-۱\ ,\ D_f=\mathbb{R}$
$g(x)=\sqrt{۴-x}+۱\ ,\ D_g=(-\infty,۴]$
$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\le ۴|(\sqrt{۴-x}+۱)\in\mathbb{R}\}=(-\infty,۴]$
$fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{۴-x}+۱)=(\sqrt{۴-x}+۱-۱)^۲-۱$
$=۴-x-۱=۳-x\ ,\ D_{fog}=(-\infty,۴]$

برای پیدا کردن برد fog، از روی دامنهٔ fog شروع به ساختن fog می‌کنیم:

$x\le ۴ \Rightarrow -x\ge -۴ \Rightarrow ۳-x\ge -۱ \Rightarrow fog(x)\ge -۱ \Rightarrow R_{fog}=[-۱,+\infty)$

۲۱ - گزینه ۳

تابع gof را تشکیل می‌دهیم.

$(gof)(x)=g(f(x))=g(x-[x])=(x-[x])+[x-[x]]$

می‌دانیم عدد صحیح در جمع و تفریق می‌تواند از داخل براکت خارج شود و چون $[x]$ عددی صحیح است، داریم:

$(gof)(x)=x-[x]+[x]-[x]=x-[x]$
می‌دانیم: $۰\le x-[x]<۱ \Rightarrow ۰\le gof(x)<۱ \Rightarrow R_{gof}=[۰,۱)$

۲۲ - گزینه ۳

$$x \rightarrow \boxed{g(x)+۱} \longrightarrow \boxed{۲f(x)} \longrightarrow ۸x+۸$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$g(x)+۱ \qquad ۲f(g(x)+۱)=۲(۲(g(x)+۱)-۸)=۴g(x)-۱۲$$

پس:

$۴g(x)-۱۲=۸x+۸ \rightarrow g(x)=۲x+۵$

بنابراین:

$g(-۱)=-۲+۵=۳$

۲۳ - گزینه ۳

$f=\{(-۱,۴),(۲,۰),(-۳,\frac{۳}{۲})\}\quad D_f=\{-۱,۲,-۳\}$

$g=\{(۰,\frac{۳}{۲}),(۲,-۱),(-۱,۱)\}\quad D_g=\{۰,۲,-۱\}$

$D_f\cap D_g=\{۲,-۱\}$

$(\frac{۱}{۲}f-۳g^۲)(-۱)=\frac{۱}{۲}f(-۱)-۳g^۲(-۱)=\frac{۱}{۲}\times ۴-۳(۱)^۲=۲-۳=-۱$

$$(\frac{۱}{۲}f - ۳g^۲)(۲) = \frac{۱}{۲}f(۲) - ۳g^۲(۲) = \frac{۱}{۲} \times ۰ - ۳(-۱)^۲ = ۰ - ۳ = -۳$$

$$\frac{۱}{۲}f - ۳g^۲ = \{(-۱,-۱),(۲,-۳)\} \Rightarrow -۱ - ۱ + ۲ - ۳ = -۳$$

۲۴ - گزینه ۴ با توجه به نمودار توابع f و g، مقادیر تابع $g - f$ را به‌ازای اعداد صحیح -۱، ۰، ۱، ۳ و ۴ پیدا می‌کنیم و از روش رد گزینه‌های نادرست استفاده می‌کنیم.

$D_f \cap D_g = [-۱, ۴]$

$(g-f)(-۱) = g(-۱) - f(-۱) = ۲ - ۰ = ۲ \Rightarrow$ **گزینهٔ ۱ نادرست**

$(g-f)(۰) = ۱ - ۱ = ۰$

$(g-f)(۱) = ۰ - ۲ = -۲ \Rightarrow$ **گزینهٔ ۲ نادرست**

$(g-f)(۳) = ۲ - ۲ = ۰$

$(g-f)(۴) = ۳ - ۲ = ۱ \Rightarrow$ **گزینهٔ ۳ نادرست**

پس گزینه‌های «۱» تا «۳» نادرست هستند.

۲۵ - گزینه ۳ زوج مرتب‌های تابع g را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$g = \{(-۳,۴),(-۲,۵),(-۱,۲),(۱,۱),(۲,۲),(۳,-۱),(۴,۰),(۷,۲)\}$

$\Rightarrow D_g = \{-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳,۴,۷\}$

دامنهٔ تابع f نیز برابر $D_f = [-a, +\infty)$ است. هم‌چنین مقدار تابع f در $x = ۱ - a$ برابر صفر است.

حال برای $D_{\frac{g}{f}}$ داریم:

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = ۰\} = [-a, +\infty) \cap \{-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳,۴,۷\} - \{۱ - a\}$$

برای اینکه $D_{\frac{g}{f}}$ شامل سه عضو باشد، از آنجا که یک عضو از مجموعهٔ اشتراک باید حذف شود، مقدار $(-a)$ را از بین مقادیر ۲ یا ۳ باید انتخاب کنیم. با امتحان کردن، به سادگی $a = -۲$ به‌دست می‌آید. در این صورت داریم:

$D_f = [۲, +\infty), f(۳) = ۰$

$\Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = \{۲,۴,۷\} \Rightarrow g(a) = g(-۲) = ۵$

۲۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & x \notin \mathbb{Z} \\ ۰ & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) : \begin{cases} x \notin \mathbb{Z}: & g(-۱) = ۱ - ۱ - ۲ = -۲ \\ x \in \mathbb{Z}: & g(۰) = -۲ \end{cases}$$

پس به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

۲۷ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x}$

$$f(g(x)) = \frac{۱ - (g(x))^۲}{۱ + (g(x))^۲} = \frac{۱ - \tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x} = \frac{۱ - \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{۱ + \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}} = \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x + \sin^۲ x} = \frac{\cos ۲x}{۱} = \cos ۲x$$

۲۸ - گزینه ۳ تابع نزولی خطی به صورت $f(x) = ax + b$ و علامت a منفی است.

$fof(x) = a(ax+b) + b = a^۲x + ab + b = ۴x + ۳$

پس $(a^۲ = ۴\ ,\ ab + b = ۳) \Rightarrow a = -۲, b = -۳$

$f(x) = -۲x - ۳ \Rightarrow f(-\frac{۵}{۲}) = ۵ - ۳ = ۲$

۲۹ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{۱ - \sin^۲ a = \cos^۲ a \ \ ,\ \ \sin a \cos a = \frac{۱}{۲}\sin ۲a}$

$fog(x) = f(g(x)) = f(\sin^۴ x) = \sin^۴ x - \sqrt{\sin^۴ x} = \sin^۴ x - \sin^۲ x$

$= \sin^۲ x(\sin^۲ x - ۱) = -\sin^۲ x(۱ - \sin^۲ x) = -\sin^۲ x \cdot \cos^۲ x$

$= -(\sin x \cdot \cos x)^۲ = -(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲ = -\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$

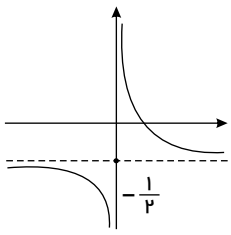
۳۰ - گزینه ۳ برای محاسبهٔ برد تابع $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$، ابتدا دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را دو ضابطه‌ای نموده و سپس $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را تشکیل می‌دهیم و می‌دانیم که $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ در دامنهٔ مشترک ایجاد می‌شود.

$$f(x)=\begin{cases} x+۳ & x\le -۱ \\ -x+۱ & x>-۱ \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} ۰ & x\le ۰ \\ ۲x & x>۰ \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases} \text{تعریف نشده} & x\le -۱ \\ \text{تعریف نشده} & -۱<x\le ۰ \\ \dfrac{-x+۱}{۲x} & x>۰ \end{cases}$$

منحنی $y=\dfrac{-x+۱}{۲x}$ یک تابع هموگرافیک است که با رسم نمودار برد تابع را می‌یابیم.

با توجه به شکل برای $x>۰$، برد تابع $\left(-\frac{۱}{۲}\,,\,+\infty\right)$ است.



۳۱ - گزینه ۴

$$f(x)=۳x-۲ \;,\; (gof)(x)=g(f(x))=۹x^۲-۹x+۲ \Rightarrow g(۳x-۲)=۹x^۲-۹x+۲$$

$$۳x-۲=t \Rightarrow x=\frac{t+۲}{۳}$$

$$g(t)=۹(\frac{(t+۲)^۲}{۹})-۹(\frac{t+۲}{۳})+۲ \Rightarrow g(t)=t^۲+۴+۴t-۳t-۶+۲ \Rightarrow g(t)=t^۲+t \Rightarrow g(x)=x^۲+x$$

پس: $(g-f)(x)=g(x)-f(x)=x^۲+x-(۳x-۲)=x^۲-۲x+۲$

۳۲ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین:

$$g(f(x))=\begin{cases} g(۰)=b & x\in\mathbb{Z} \\ g(-۱)=۱-a+b & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

چون برد تابع برابر $\{۲\}$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} b=۲ \\ ۱-a+b=۲ \xrightarrow{b=۲} a=۱ \end{cases}$$

۳۳ - گزینه ۲

$$f(x)=۲ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$g=\{(۰,۱),(۱,۲),(۲,۳)\} \Rightarrow D_g=\{۰,۱,۲\} \Rightarrow D_f\cap D_g=\{۰,۱,۲\}$$

$$f+g=\{(۰,۱+۲),(۱,۲+۲),(۲,۳+۲)\}=\{(۰,۳),(۱,۴),(۲,۵)\} \;,\; D_{f+g}=\{۰,۱,۲\}$$

$$h(x)=x^۲-۲x+۳ \;,\; D_h=\mathbb{R}$$

$$D_{(f+g)oh}=\{x\in D_h | h(x)\in D_{f+g}\}=\{x\in\mathbb{R}|h(x)\in\{۰,۱,۲\}\}$$

$h(x)=۰ \Rightarrow x^۲-۲x+۳=۰ \Rightarrow \Delta=۴-۱۲=-۸<۰$ ریشه ندارد.

$h(x)=۱ \Rightarrow x^۲-۲x+۳=۱ \Rightarrow x^۲-۲x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۴-۸=-۴<۰$ ریشه ندارد.

$$h(x)=۲ \Rightarrow x^۲-۲x+۳=۲ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$\Rightarrow D_{(f+g)oh}=\{۱\} \Rightarrow ((f+g)oh))(۱)=(f+g)(h(۱))=(f+g)(۲)=۵$$

$$(f+g)oh=\{(۱,۵)\}$$

۳۴ ـ گزینه ۳

$$x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to x \Rightarrow g(f(x)) = x \ , \ \ f(x) = \frac{۲^x - ۱}{۳} \Rightarrow g(\frac{۲^x - ۱}{۳}) = x$$

$$\frac{۲^x - ۱}{۳} = ۵ \Rightarrow ۲^x = ۱۶ = ۲^۴ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow g(۵) = ۴$$

۳۵ ـ گزینه ۲

$$fog(x) = \frac{۲x + ۱}{x - ۱} \Rightarrow f\left(g(x)\right) = \frac{۲x + ۱}{x - ۱} \Rightarrow f(\frac{x - ۱}{x}) = \frac{۲x + ۱}{x - ۱}$$

$$\frac{x - ۱}{x} = t \Rightarrow x - ۱ = tx \Rightarrow x(۱ - t) = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۱ - t}$$

$$f(t) = \frac{\frac{۲}{۱ - t} + ۱}{\frac{۱}{۱ - t} - ۱} = \frac{۲ + ۱ - t}{۱ - (۱ - t)} = \frac{۳ - t}{t} \Rightarrow f(x) = \frac{۳ - x}{x}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{۳ - x}{x} + \frac{x - ۱}{x} = \frac{۳ - x + x - ۱}{x} = \frac{۲}{x}$$

۳۶ ـ گزینه ۳

$$f(x) = -\frac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} \to D_f : \text{مخرج} = ۰ \to x(x + ۲) = ۰$$

$$\to x = ۰, x = -۲ \to D_f = \mathbb{R} - \{-۲, ۰\}$$

$$g(x) = \sqrt{-x^۲ - x} \to D_g : -x^۲ - x \geq ۰ \to x(-x - ۱) \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ \leq x \leq ۰$$

$$D_{gof(x)} = \{x \in D_f \, , \, f(x) \in D_g\} = \{x \neq ۰, -۲ \, , \, -۱ \leq -\frac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} \leq ۰\}$$

$$= \{x \neq ۰, -۲ \, , \, ۰ \leq \frac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} \leq ۱\}$$

$$\begin{cases} \frac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} \geq ۰ \xrightarrow[\text{و } \Delta<۰ \text{ است.}]{\text{صورت کسر همواره مثبت است چون } a>۰} x^۲ + ۲x > ۰ \ \ (I) \\ \frac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} \leq ۱ \to \frac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} - ۱ \leq ۰ \to \frac{۲}{x^۲ + ۲x} \leq ۰ \to x^۲ + ۲x < ۰ \ \ (II) \end{cases}$$

واضح است که (I) و (II) هیچ اشتراکی ندارند پس $D_{gof(x)} = \{\ \}$ است.

۳۷ ـ گزینه ۲

$$(gof^{-۱})(a) = ۱ \to g(f^{-۱}(a)) = ۱$$

می‌دانیم اگر $g(m) = n$، آنگاه $g^{-۱}(n) = m$، پس:

$$g(f^{-۱}(a)) = ۱ \to g^{-۱}(۱) = f^{-۱}(a) \Rightarrow ۰ = f^{-۱}(a) \Rightarrow ۲ = a$$

حال مقدار $(fog)(-a)$ را با جای‌گذاری $a = ۲$ حساب می‌کنیم:

$$(fog)(-۲) = f(g(-۲)) = f(۰) = ۲$$

۳۸ ـ گزینه ۴

$$f(x) = x^۲ + kx$$

$$g(x) = \frac{|x|}{x} - ۲ = \begin{cases} \frac{x}{x} - ۲ = ۱ - ۲ = -۱ & , x > ۰ \\ \frac{-x}{x} - ۲ = -۱ - ۲ = -۳ & , x < ۰ \end{cases}$$

$$x > ۰ \Rightarrow (fog)(x) = f(g(x)) = f(-۱) = (-۱)^۲ + k(-۱) = ۱ - k$$

$x < ۰ \Rightarrow (fog)(x) = f(g(x)) = f(-۳) = (-۳)^۲ + k(-۳) = ۹ - ۳k$

برد تابع fog به‌صورت $\{۱ - k, ۹ - ۳k\}$ است و برای اینکه برد تابع fog فقط شامل یک عضو باشد، باید $۱ - k$ و $۹ - ۳k$ برابر باشند.

$۹ - ۳k = ۱ - k \Rightarrow ۸ = ۲k \Rightarrow k = ۴$

۳۹ - گزینه ۲

می‌دانیم:

$D_{fog} = \{x | x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\}$

از روی نمودار مشخص است که وقتی $۰ \le g(x) < ۲$ است آنگاه $-۱ < x < ۱$ در حال تغییر است.

$D_{fog} = \{x | x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\}$

$-۲ \le x \le ۲ \ , \ ۰ \le g(x) < ۲ \Rightarrow \{x | -۲ \le x \le ۲ \ , \ -۱ < x < ۱\} \Rightarrow -۱ < x < ۱$

۴۰ - گزینه ۳ تابع $۲g$ را تعیین می‌کنیم.(باید مؤلفه‌های دوم g را در ۲ ضرب کنیم)

$۲g = \{(۳,۴), (۲,۲), (۴,۱۰), (۱,۶)\} \ , \ f(۲g) : \{x \in D_{۲g} \ , \ ۲g \in D_f\}$

$D_{۲g}$		$R_{۲g}$		D_f		R_f		
۳	$\to$	۴	$\to$	۴	$\to$	۷	$\Rightarrow$	$(۳,۷)$
۲	$\to$	۲	$\to$	۲	$\to$	۵	$\Rightarrow$	$(۲,۵)$
۴	$\to$	۱۰	$\to$	$\times$				
۱	$\to$	۶	$\to$	۶	$\to$	۳	$\Rightarrow$	$(۱,۳)$

$f(۲g) = \{(۳,۷), (۲,۵), (۱,۳)\}$

پس برد تابع حاصل $\{۷,۵,۳\}$ است.

۴۱ - گزینه ۴

$g(f(x)) = \sqrt{۶ - x^۲ + ۵x} \Rightarrow -x^۲ + ۵x + ۶ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ - ۵x - ۶ \le ۰$

در نتیجه $-۱ \le x \le ۶$ پس دامنه آن $[-۱,۶]$.

راه حل دوم:

$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = (-\infty, ۶] \quad D_{gof} = \{x | x \in D_f \ , \ f(x) \in D_g\}$

$D_{gof} = \{x | x \in \mathbb{R} \ , \ x^۲ - ۵x \le ۶\}$

$\to \begin{cases} x^۲ - ۵x - ۶ \le ۰ \\ (x-۶)(x+۱) \le ۰ \end{cases}$

		-۱		۶	
$x^۲ - ۵x - ۶$	+	۰	-	۰	+
			ج		

$\Rightarrow D_{gof} = \{x | x \in \mathbb{R} \ , \ -۱ \le x \le ۶\}$

۴۲ - گزینه ۱ روش اول:

$f(x) = \dfrac{۴^x}{۴^x + ۲}$

$f(\alpha) + f(\beta) = \dfrac{۴^\alpha}{۴^\alpha + ۲} + \dfrac{۴^\beta}{۴^\beta + ۲} = \dfrac{۴^{\alpha+\beta} + ۲ \times ۴^\alpha + ۴^{\alpha+\beta} + ۲ \times ۴^\beta}{(۴^\alpha + ۲)(۴^\beta + ۲)}$

$\xlongequal{\alpha+\beta=۱} \dfrac{۴ + ۲ \times ۴^\alpha + ۴ + ۲ \times ۴^\beta}{۴^{\alpha+\beta} + ۲ \times ۴^\alpha + ۲ \times ۴^\beta + ۴} = \dfrac{۸ + ۲(۴^\alpha + ۴^\beta)}{۸ + ۲(۴^\alpha + ۴^\beta)} = ۱$

روش دوم: قرار می‌دهیم $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ بنابراین:

$f(\alpha) + f(\beta) = f(۰) + f(۱) = \dfrac{۱}{۳} + \dfrac{۴}{۶} = \dfrac{۱}{۳} + \dfrac{۲}{۳} = \dfrac{۳}{۳} = ۱$

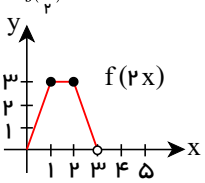
۴۳ - گزینه ۱

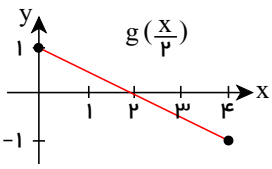
می‌دانیم: اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه‌ی $[a,b]$ باشد آنگاه دامنه‌ی $f(kx)$ بازه‌ی $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ می‌باشد.

$D_{f(x)} = [۰,۶) \Rightarrow D_{f(۲x)} = [۰,۳)$

$D_{g(x)} = [۰,۲] \Rightarrow D_{g(\frac{x}{۲})} = [۰,۴]$

$D_{\frac{f(۲x)}{g(\frac{x}{۲})}} = [۰,۳) \cap [۰,۴] - \{x \,|\, g(\frac{x}{۲}) = ۰\} = [۰,۳) - \{۲\}$





نکته: اگر دامنه $f(x)$ تقسیم بر k شود، دامنه $f(kx)$ به دست می‌آید و اگر $۰ < k < ۱$ باشد، این دامنه بزرگ‌تر و اگر $k > ۱$ باشد، این دامنه کوچک‌تر می‌شود.

۴۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - g(x) = ۰$

$$D_g = D_{f(۱-x)} \cap D_{f(-x)} - \{x : f(-x) = ۰\}$$
$$= \{x : -۲ \le ۱ - x \le ۰\} \cap \{x : -۲ \le -x \le ۰\} - \{۰, ۲\}$$
$$= \{x : ۱ \le x \le ۳\} \cap \{x : ۰ \le x \le ۲\} - \{۰, ۲\} = [۱, ۲)$$

۴۵ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog} = \{x | -۴ \le x \le ۴ \ , \ ۲ \le |x - ۱| \le ۴\}$$

$$۲ \le |x - ۱| \le ۴ \Rightarrow \begin{cases} ۲ \le x - ۱ \le ۴ \Rightarrow ۳ \le x \le ۵ \\ \text{یا} \\ -۴ \le x - ۱ \le -۲ \Rightarrow -۳ \le x \le -۱ \end{cases}$$
$$\Rightarrow D_{fog} = [-۴, ۴] \cap ([-۳, -۱] \cup [۳, ۵])$$
$$= ([-۴, ۴] \cap [-۳, -۱]) \cup ([-۴, ۴] \cap [۳, ۵])$$
$$= [-۳, -۱] \cup [۳, ۴] = [-۳, ۴] - (-۱, ۳)$$

۴۶ - گزینه ۴

$$D_{fof} = \{x | x \in D_f \ , \ f(x) \in D_f\} = \{x | x \ne ۱ \ , \ f(x) \ne ۱\}$$

برای حل $f(x) \ne ۱$، ابتدا معادله‌ی $f(x) = ۱$ را حل می‌کنیم و x را مخالف جواب‌های به‌دست آمده قرار می‌دهیم.

اگر $x > ۱ \Rightarrow f(x) = ۱$

(همه‌ی اعداد $x > ۱$ جواب‌های معادله‌ی $f(x) = ۱$ هستند.)

اگر $x < ۱ \Rightarrow f(x) = x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$

و با توجه به پیش‌شرط $x < ۱$ فقط $x = -۱$ قابل قبول است.

پس مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $f(x) = ۱$ مجموعه‌ی $\{-۱\} \cup (۱, +\infty)$ است. پس:

$$D_{fof} = \{x | x \ne ۱ \ , \ x \ne -۱ \ , \ x \le ۱\} = \{x \ne -۱ \ , \ x < ۱\} = (-\infty, ۱) - \{-۱\}$$

۴۷ - گزینه ۲ ابتدا دو تابع f و g را با هم ترکیب می‌کنیم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sin \pi(x - [x])$$

$$۰ \le x - [x] < ۱ \Rightarrow ۰ \le \pi(x - [x]) < \pi$$

چون کمان سینوس در نواحی اول و دوم می‌باشد، همواره sin بین صفر و یک می‌باشد. پس: $R_{gof} = [۰, ۱]$

۴۸ - گزینه ۲ می‌دانیم: $D_{gof(x)} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$

$$f(x) = \frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲} \ \rightarrow \ D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x - x^۲} \quad \rightarrow x - x^۲ \ge ۰ \rightarrow x(۱ - x) \ge ۰$$

تعیین علامت

		۰		۱	
$x - x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$\rightarrow D_g = [۰, ۱]$

$$D_{g(f(x))} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, ۰ \le \frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲} \le ۱\right\}$$

$۰ \le \frac{۱-x^۲}{۱+x^۲} \le ۱ \rightarrow$ چون $۱ + x^۲ > ۰$ باضرب طرفین در این مقدار علامت نامساوی تغییر نمیکند.

$$\rightarrow ۰ \le ۱ - x^۲ \le ۱ + x^۲$$
$$۱ - x^۲ \ge ۰ \rightarrow x^۲ \le ۱ \rightarrow -۱ \le x \le ۱ \quad (I)$$

$$۱ - x^۲ \le ۱ + x^۲ \rightarrow ۲x^۲ \ge ۰ \rightarrow \text{همواره برقرار} \xrightarrow{(II)} I \cap II \Rightarrow D_{gof} = [-۱, ۱]$$

۴۹ - گزینه ۴

$$f(x) = \frac{۴}{x - ۱} \ , \ D_f : x \ne ۱ \ , \ g(x) = \frac{۱}{۲ - x} \ , \ D_g : x \ne ۲$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \ne ۱ | f(x) \ne ۲\}$$

$$f(x) \ne ۲ \Rightarrow \frac{۴}{x - ۱} \ne ۲ \Rightarrow x - ۱ \ne ۲ \Rightarrow x \ne ۳ \Rightarrow D_{gof} = \mathbb{R} - \{۱, ۳\}$$

۵۰ - گزینه ۴

$$f(x)=x^{۲}-۳x+۲=(x-۱)(x-۲)$$

$$(fog)(x)=۰\Rightarrow f(g(x))=۰\Rightarrow f(x^{۲}-x+۱)=۰\Rightarrow (x^{۲}-x+۱-۱)(x^{۲}-x+۱-۲)=۰$$

$$\Rightarrow (x^{۲}-x)(x^{۲}-x-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x^{۲}-x=۰\Rightarrow x(x-۱)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۱ \\ x^{۲}-x-۱=۰\xrightarrow{\Delta=b^{۲}-۴ac=۱+۴=۵} x_{۱,۲}=\dfrac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \end{cases}$$

پس معادلهٔ $(fog)(x)=۰$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز می‌باشد.

۵۱ - گزینه ۱ ابتدا $fof(۲)$ را می‌سازیم:

$$fof(۲)=f(f(۲))=f(۲m+b)=m(۲m+b)+b=۲m^{۲}+mb+b$$

$$fof(۲)=۲\Rightarrow ۲m^{۲}+mb+b=۲\Rightarrow ۲m^{۲}+mb+b-۲=۰$$

چون در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ اگر $a+c=b$ باشد یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $-\dfrac{c}{a}$ است بنابراین داریم:

$$m=-\frac{c}{a}=-\frac{b-۲}{۲}\xrightarrow{b\geq ۴} m\leq -۱$$

پس بیشترین مقدار m برابر -۱ است.

۵۲ - گزینه ۲ بنا به تعریف داریم:

$$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x\in D_f|f(x)=۰\}$$

$$=((-\infty,۴]\cap\{۱,۲,۴,۵\})-\{۴\}=\{۱,۲,۴\}-\{۴\}=\{۱,۲\}$$

پس دامنهٔ تابع $\dfrac{g}{f}$ دارای دو عضو است.

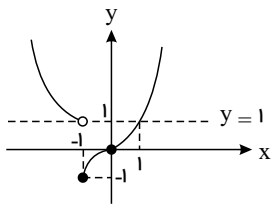
۵۳ - گزینه ۱ ضابطهٔ تابع $f(x)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & -۱\leq x<۰ \\ x & x<-۱ \end{cases}$$

حال تابع $(f\cdot g)(x)$ را به دست می آوریم:

$$(f\cdot g)(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ -x^{۲} & -۱\leq x<۰ \\ x^{۲} & x<-۱ \end{cases}$$

نمودار تابع $(f\cdot g)(x)$ به شکل مقابل است:



که تنها به ازای $x=۱$ داریم: $(f\cdot g)(x)=۱$

۵۴ - گزینه ۲ می‌دانیم $f(۱)=-۲$ است. پس:

$$((f-۲g)of)(۱)=(f-۲g)(f(۱))=(f-۲g)(-۲)$$

$$=f(-۲)-۲g(-۲)=\left((-۲)^{۲}-۳(-۲)\right)-۲(۲)=(۴+۶)-۴=۶$$

۵۵ - گزینه ۴ باتوجه به شکل دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $D_f=(-\infty,۳]$ است.

$$g(x)=\log_{۲}(x^{۲}+۲x)\Rightarrow D_g: x^{۲}+۲x>۰\Rightarrow x(x+۲)>۰\Rightarrow \begin{cases} x>۰ \\ \text{یا} \\ x<-۲ \end{cases}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x>۰\ \text{یا}\ x<-۲|\log_{۲}(x^{۲}+۲x)\leq ۳\}$$

$$\log_{۲}(x^{۲}+۲x)\leq ۳\Rightarrow x^{۲}+۲x\leq ۸\Rightarrow x^{۲}+۲x-۸\leq ۰$$

$$\Rightarrow (x+۴)(x-۲)\leq ۰\Rightarrow -۴\leq x\leq ۲$$

$$D_{fog}=\{x>۰\ \text{یا}\ x<-۲|-۴\leq x\leq ۲\}=[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$$

۵۶ - گزینه ۴

$$(۲,۳)\in f\ ,\ (۱,۳)\in fog\Rightarrow (۱,۲)\in g\Rightarrow g(۱)=۲$$

$(a,۴) \in f\ ,\ (۴,۴) \in fog \Rightarrow (۴,a) \in g \Rightarrow g(۴) = a \Rightarrow ۴ + \sqrt{۴} = a \Rightarrow a = ۶$

$(۱۲,۱) \in f\ ,\ (b,۱) \in fog \Rightarrow (b,۱۲) \in g \Rightarrow g(b) = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} = ۱۲ \rightarrow b = ۹$

بنابراین $a + b = ۱۵$ است.

۵۷ - گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ تابع خطی g که گذرنده از دو نقطهٔ $\left|\begin{matrix} -۴ \\ ۰ \end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۸ \end{matrix}\right.$ است را می‌نویسیم.

$$\frac{y}{x+۴} = \frac{۰-۸}{-۴-۰} = ۲ \rightarrow y = ۲x + ۸ \rightarrow g(x) = ۲x + ۸$$

با توجه به نمودار تابع f، در نقاط ۱ و ۳ مقدار تابع f صفر است، یعنی $f(۳) = ۰$ و $f(۱) = ۰$ پس داریم:

$f(g(x)) = ۰ \Rightarrow g(x) = ۱$ یا $g(x) = ۳$

حال ضابطهٔ تابع g را می‌یابیم.

$$g(x) = ۱ \Rightarrow ۲x + ۸ = ۱ \Rightarrow x = -\frac{۷}{۲}$$

$$g(x) = ۳ \Rightarrow ۲x + ۸ = ۳ \Rightarrow x = -\frac{۵}{۲}$$

مجموع جواب‌ها $= -\frac{۷}{۲} - \frac{۵}{۲} = -۶$

۵۸ - گزینه ۳

$$f(x) = \frac{۲x-۱}{x-۳}\ ,\ D_f = \mathbb{R} - \{۳\}$$

$$g(x) = \sqrt{۹ - x^۲}\ ,\ ۹ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۹ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۳ \Rightarrow D_g = [-۳,۳]$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \neq ۳ | -۳ \leq f(x) \leq ۳\} = \{x \neq ۳ | -۳ \leq \frac{۲x-۱}{x-۳} \leq ۳\}$$

$$\frac{۲x-۱}{x-۳} \geq -۳ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x-۳} + ۳ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱+۳x-۹}{x-۳} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۵x-۱۰}{x-۳} \geq ۰$$

$$\frac{۲x-۱}{x-۳} \leq ۳ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x-۳} - ۳ \leq ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱-۳x+۹}{x-۳} \leq ۰ \Rightarrow \frac{-x+۸}{x-۳} \leq ۰$$

x	$-\infty$		۲		۳		۸		$+\infty$
$\frac{۵x-۱۰}{x-۳}$		+ ج	۰ ج	−	ت.ن	+ ج		+ ج	
$\frac{-x+۸}{x-۳}$		− ج		− ج	ت.ن	+	۰ ج	− ج	

$$D_{gof} = (-\infty, ۲] \cup [۸, +\infty)$$

اعداد صحیحی که در دامنهٔ gof قرار ندارند عبارت‌اند از: ۳, ۴, ۵, ۶, ۷

۵۹ - گزینه ۴

$$D_f = \{-۲, -۱, ۰\}\ ,\ D_g = \{۲a, ۰, -۳\} \Rightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{۰, -۱\}$$

باتوجه به رابطهٔ بالا می‌توان نتیجه گرفت که $۲a$ باید -۱ باشد. پس داریم:

$$۲a = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow g = \{(-۱,۳), (۰,۱), (-۳,۴)\}\ ،\ f = \{(-۲,۳), (-۱,-۱), (۰,۴)\}$$

$$(۲f + g)(۰) = ۲f(۰) + g(۰) = ۲ \times ۴ + ۱ = ۹$$

$$(۲f + g)(-۱) = ۲f(-۱) + g(-۱) = ۲(-۱) + ۳ = ۱$$

$$۲f + g = \{(۰,۹), (-۱,۱)\} \Rightarrow ۲f + g \text{ برد} = \{۹,۱\} \Rightarrow ۹ \times ۱ = ۹ \Rightarrow \frac{۹}{a} = \frac{۹}{-\frac{۱}{۲}} = -۱۸$$

۶۰ - گزینه ۴ تابع g را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x) = x - ۲ + |x - ۲| = \begin{cases} ۲x - ۴ & ; x > ۲ \\ ۰ & ; x \leq ۲ \end{cases}$$

دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ است و دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$، بازهٔ $(۲, +\infty)$ است. زیرا برای $x \leq ۲$ مقدار تابع g برابر صفر است.

تابع $\frac{f}{g}$ را با شرط $x > ۲$ تشکیل می‌دهیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{۸ - ۲x^۲}{۲x - ۴} = \frac{-۲(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)} = -(x+۲)$$

حال داریم:

$$x > ۲ \Rightarrow x + ۲ > ۴ \Rightarrow -(x+۲) < -۴ \Rightarrow R_{\frac{f}{g}} = (-\infty, -۴)$$

۶۱ - گزینه ۴ ابتدا دامنه و ضابطهٔ fof را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{fof} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_f\} = \{x | -۲ \leq x \leq ۱, -۲ \leq ۲x - ۳ \leq ۱\}$$
$$= \{x | -۲ \leq x \leq ۱, \frac{۱}{۲} \leq x \leq ۲\} = [\frac{۱}{۲}, ۱]$$
$$(fof)(x) = f(۲x - ۳) = ۴x - ۹$$

حال برای برد fof داریم:

$$\frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱ \Rightarrow ۲ \leq ۴x \leq ۴ \Rightarrow -۷ \leq ۴x - ۹ \leq -۵ \Rightarrow R_{fof} = [-۷, -۵]$$

۶۲ - گزینه ۱

$$D_f = [۰, +\infty), D_g = \mathbb{R}\ ,\ D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} \Rightarrow D_{fog} = \left\{x | x \in \mathbb{R}, ۲[x] - [x]^۲ \geq ۰\right\}$$

اگر فرض کنیم $t = [x]$ نامعادلهٔ بالا به‌صورت $۲t - t^۲ \geq ۰$ به‌دست می‌آید که جواب آن $۰ \leq t \leq ۲$ است، بنابراین داریم:

$$۰ \leq t = [x] \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq x < ۳ \Rightarrow D_{fog} = [۰, ۳)$$

اکنون برد fog را به‌دست می‌آوریم:

$$(fog)(x) = \sqrt{۲[x] - [x]^۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [x] = ۰ : (fog)(x) = ۰ \\ [x] = ۱ : (fog)(x) = ۱ \\ [x] = ۲ : (fog)(x) = ۰ \end{cases} \Rightarrow R_{fog} = \{۰, ۱\}$$

مجموع اعضای برد fog برابر ۱ است.

۶۳ - گزینه ۳ ابتدا fog, gof را تشکیل می دهیم:

$$fog = \{(۱,۱), (۳,۷), (a,۲), (b,۷)\} \quad (۴,۲) \in fog \Rightarrow a = ۴$$

با توجه به این که $(۴,۱)$ در gof است پس $b = ۵$ است.

راه حل تشریح شده: ابتدا توابع fog و gof را بصورت زوج مرتب نشان می دهیم:

$$fog(x) = f(g(x)) = \left\{\begin{array}{l} x = ۱ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۱ \\ x = ۳ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۷ \\ x = a \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} ۲ \\ x = b \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۷ \end{array}\right\} \rightarrow fog = \{(۱,۱)(۳,۷)(a,۲)(b,۷)\}$$

چون در صورت سؤال گفته $(۴,۲) \in fog$ پس $a = ۴ \leftarrow (a,۲) = (۴,۲)$

$$gof = g(f(x)) = \begin{cases} x = ۲ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{g} ۲ \\ x = ۳ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} ? \\ x = ۴ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g} ? \\ x = ۱ \xrightarrow{f} ۷ \xrightarrow{g} ? \end{cases}$$

در سؤال گفته $(۴,۱) \in gof$ پس $x = ۴ \xrightarrow{f} \underbrace{۵ \xrightarrow{g} ۱}_{(b,۱) \in g}$ در نتیجه $b = ۵$

۶۴ - گزینه ۳ با توجه به ماشین داده شده جملهٔ $(۲x - ۲)$ داخل xهای تابع $\frac{x}{\sqrt{x} + ۱}$ قرار می‌گیرد بنابراین:

$$\frac{2x-2}{\sqrt{2x-2}+1}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3(x-1)=2(\sqrt{2(x-1)}+1)\xrightarrow{\sqrt{x-1}=t}3t^2=2(t\sqrt{2}+1)\Rightarrow 3t^2-2t\sqrt{2}-2=0$$

$$t=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{2}\Rightarrow x=3$$

۶۵ - گزینه ۲

می‌دانیم نمودار توابع در ریشه‌ی مضاعف بر محور xها مماس است و در ریشه‌های ساده محور xها را قطع می‌کند.

$$y=x^2-1$$
$$fof(x)=(x^2-1)^2-1=0\Rightarrow(x^2-1)^2=1$$
$$x^2-1=\pm1\Rightarrow\begin{cases}x^2-1=1\\x^2-1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\\x^2=0\Rightarrow x=0\ \text{مضاعف}\end{cases}$$

یک ریشه مضاعف و دو ریشه قرینه دارد.

۶۶ - گزینه ۳ ضابطه ی $f(f(x))$ را تشکیل می دهیم:

$$f(f(x))=f(2-|x-2|)=2-|2-|x-2|-2|$$
$$=2-|-|x-2||=2-|x-2|=f(x)$$

۶۷ - گزینه ۴

راه اول: ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ را پیدا میکنیم و در معادلهٔ $(fog)\frac{1}{a}$ قرار می‌دهیم باید ریشهٔ این معادله باشد.

$$f(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{a}\Rightarrow(fog)(\frac{1}{a})=0$$
$$(fog)(x)=a(1-2x)-1=a-2ax-1$$
$$(fog)(\frac{1}{a})=0\Rightarrow a-2-1=0\Rightarrow a=3$$

راه حل دوم: ابتدا معادله تلاقی دو تابع f و fog را تشکیل داده، طول نقطه تلاقی آنها را می یابیم سپس با جایگذاری آن در یکی از معادلات f یا fog، a را می یابیم.

$$fog(x)=f(x)\to a-2ax-1=ax-1\to-3ax+a=0$$
$$\to a(-3x+1)=0\to-3x+1=0\to x=\frac{1}{3}$$

$f(\frac{1}{3})=0\to$ **زیرا در صورت سؤال گفته شده نقطه تلاقی روی محور xها قرار دارد**

$$\to a(\frac{1}{3})-1=0\to\frac{a}{3}=1\to a=3$$

۶۸ - گزینه ۳

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ و $g(x)$ را می‌یابیم.

$$D_f:1-x\geq0\to x\leq1\ ,\ D_g:x-1\geq0\to x\geq1$$
$$D_{fog(x)}=\{x|x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}$$
$$\left.\begin{array}{l}x\geq1\\\sqrt{x-1}\leq1\Rightarrow x-1\leq1\ \Rightarrow\ x\leq2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x\in[1,2]$$

۶۹ - گزینه ۲

$$D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$$
$$\begin{cases}g(x)=x-\sqrt{x^2-1}\\f(x)=x+\sqrt{x^2-1}\end{cases}\Rightarrow x^2-1\geq0\Rightarrow x^2\geq1\Rightarrow|x|\geq1\Rightarrow x\leq-1\ \text{یا}\ x\geq1$$

نمودار تابع $y=f\cdot g$ خط افقی $y=1$ است که در بازهٔ $(\infty,-1)\cup[1,+\infty]$ رسم می‌شود.

$$y=(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=x^2-x^2+1=1$$

۷۰ - گزینه ۲

با توجه به شکل داریم:

$$D_f=[-1,2)\ \ ,\ \ R_f=(-1,1]$$
$$D_{fof}=x\in D_f;f\in[-1,2)\to D_{fof}=[-1,2)$$

با توجه به نمودار تابع وقتی $-1\leq x<2$ است مقدار fof در بازه‌ی $[0,1]$ تغییر می‌کند بنابراین برد تابع fof بازه‌ی $[0,1]$ می‌باشد.

۷۱ - گزینه ۳

$$f(f(x))=3\sqrt{f(x)}-2\Rightarrow f(x)=3\sqrt{x}-2$$
$$gof(x)=\frac{3\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-3}\qquad Dgof=\begin{cases}x\geq0\\3\sqrt{x}-3\neq0\to\sqrt{x}\neq1\to x\neq1\end{cases}\Rightarrow D_{gof}=[0,+\infty)-\{1\}$$

راه حل دوم:

$$fof(x)=f(f(x))=۳\sqrt{f(x)}-۲\rightarrow f(x)=۳\sqrt{x}-۲\rightarrow D_f=[۰,+\infty)$$
$$gof(x)=g(f(x))=\frac{f(x)+۱}{f(x)-۱}\rightarrow g(x)=\frac{x+۱}{x-۱}\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$
$$D_{gof}=\{x|x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}=\{x|x\geq ۰\ ,\ ۳\sqrt{x}-۲\neq ۱\}=[۰,+\infty)-\{۱\}$$

۷۲ - گزینه ۲ ابتدا تابع $y=fof(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}\Rightarrow f(f(x))=f(\frac{x-۱}{x+۱})=\frac{\frac{x-۱}{x+۱}-۱}{\frac{x-۱}{x+۱}+۱}=\frac{-\frac{۲}{x+۱}}{\frac{۲x}{x+۱}}$$

پس دامنه‌ی تابع $y=f(f(x))$ برابر $\mathbb{R}-\{۰,-۱\}$ است و در نتیجه:

$$y=f(f(x))=-\frac{۱}{x}\xrightarrow{x\neq ۰,-۱}R_{fof}=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$$

۷۳ - گزینه ۱

$$D_{gof}=\{x:x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}$$

با توجه به اینکه $D_f=\mathbb{R}$ است تابع $f(x)$ را در دامنه تابع $g(x)$ قرار می‌دهیم.

$$-۲\leq ۴x^۲-۲\leq ۲\Rightarrow ۰\leq ۴x^۲\leq ۴\Rightarrow ۰\leq x^۲\leq ۱\Rightarrow ۰\leq |x|\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

۷۴ - گزینه ۴

از روی نمودار مشخص است که $D_f=[-۲,۲]$ و برد تابع $[۰,۲]$ می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l}D_f=[-۲,۲]\\ ۰\leq f(x)\leq ۲\end{array}\right\}\Rightarrow D_{fof,}=[-۲,۲]$$
$$y=fof(x)=f(f(x))\xRightarrow{۰\leq f(x)\leq ۲}۰\leq y\leq ۲$$

۷۵ - گزینه ۳

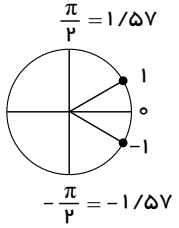
می‌دانیم: $\boxed{(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}}$

$$\left.\begin{array}{l}(gof^{-۱})^{-۱}=fog^{-۱}\\ g^{-۱}=\{(-۳,۱),(۲,۳),(۱,۴)\}\\ f=\{(۰,-۱),(۱,۲),(-۲,۳),(۳,۱),(۲,۵)\}\end{array}\right\}\Rightarrow fog^{-۱}=\{(-۳,۲),(۲,۱)\}$$
$$R_{fog^{-۱}}=\{۱,۲\}\Rightarrow ۲+۱=۳$$

۷۶ - گزینه ۱ ابتدا تابع $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم

$$gof(x)=\cos(\sin x)$$

چون برد عبارت $\sin x$ در بازه $[-۱,۱]$ است بنابراین دامنه $\cos x$ در بازه $[-۱,۱]$ قرار دارد که با توجه به دایره مثلثاتی در ناحیه‌ی اول و چهارم قرار دارد.
و در این فاصله بیشترین مقدار کسینوس ۱ و کمترین آن نزدیک صفر می‌باشد که هرگز به صفر نمی‌رسد. پس شامل یک عدد صحیح می‌باشد.



۷۷ - گزینه ۳

ابتدا باید دامنه‌ی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را پیدا کنیم.

$$D_f=\mathbb{R},D_g=(-\infty,۲]$$
$$D_{gof}=\{x\,|x\in D_f,f(x)\in D_g\}=\{x\,|x\in\mathbb{R},۳^x+۳^{-x}\leq ۲\}$$
$$=\{x\,|x\in\mathbb{R},۳^x+\frac{۱}{۳^x}\leq ۲\}$$

می‌دانیم: اگر $a>۰$ باشد آنگاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ می‌باشد.

چون $۳^x>۰$ پس $۳^x+\frac{۱}{۳^x}\geq ۲$ و می‌بینیم که فقط به ازای $x=۰$ داریم:

$$۳^۰+\frac{۱}{۳^۰}=۲\Rightarrow D_{gof}=\mathbb{R}\cap\{۰\}=\{۰\}$$

۷۸ - گزینه ۲

$$D_{fog}=\{x:x\in D_g,g(x)\in D_f\}$$
$$=\{x:-۲\leq x\leq ۲,۰\leq g(x)\leq ۲\}\xRightarrow[\text{از روی نمودار مشخص است که وقتی } ۰\leq g(x)\leq ۲ \text{ است که } -۱\leq x\leq ۱ \text{ باشد}]{}\{x:-۲\leq x\leq ۲,-۱\leq x\leq ۱\}$$
$$=\{x:-۱\leq x\leq ۱\}$$

۷۹ - گزینه ۲ کافی است گزینه‌ها را بررسی کنیم:

$$a=۳:\begin{cases}fog(۳)=f(g(۳))=f(۳)=۱\\ gof(۳)=g(f(۳))=g(۱)=۴\end{cases}\quad \text{برابر نیست}$$

در بقیه گزینه‌ها برابر هستند.

۸۰ - گزینه ۴ با توجه به تعریف دامنهٔ تابع fog داریم:

روش اول:

$$D_{fog}=\{x: x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$
$$D_g=\mathbb{R}, D_f=\{x: x-۱\geq ۰, ۸-x\geq ۰\Rightarrow ۱\leq x\leq ۸\}$$
$$D_{fog}=\{x: x\in\mathbb{R}, [x]\in[۱,۸]\}$$
$$۱\leq[x]\leq ۸\Rightarrow ۱\leq x<۹\Rightarrow D_{fog}=[۱,۹)$$

روش دوم: ابتدا ضابطه تابع $f(g(x))$ را می‌سازیم و بدون ساده کردن ضابطه، دامنه آن را تعیین می‌کنیم.

$$g(x)=[x],\ \ f(x)=\sqrt{x-۱}-\sqrt{۸-x}$$
$$f(g(x))=f([x])=\sqrt{[x]-۱}-\sqrt{۸-[x]}$$
$$\begin{cases}[x]-۱\geq ۰\to[x]\geq ۱\\ ۸-[x]\geq ۰\to[x]\leq ۸\end{cases}\Rightarrow ۱\leq[x]\leq ۸\Rightarrow ۱\leq x<۹\Rightarrow D_{fog}=[۱,۹)$$

نکته:

$$[f]\geq k\Rightarrow f\geq k$$
$$[f]\leq k\Rightarrow f<k+۱$$

۸۱ - گزینه ۲

با توجه به تعریف داریم:

$$D_{fog(x)}=\{x|x\in D_g\ \ ,\ \ g(x)\in D_f\}$$
$$D_{fog}=\begin{cases}x\in D_g\Rightarrow x^۲-۱۵x>۰\Rightarrow\begin{cases}x>۱۵\\ x<۰\end{cases}\quad(۱)\\ g(x)\in D_f\xrightarrow{D_f:\ x\leq ۲}g(x)\leq ۲\to\log(x^۲-۱۵x)\leq ۲\Rightarrow x^۲-۱۵x-۱۰۰\leq ۰\Rightarrow -۵\leq x\leq ۲۰\quad(۲)\end{cases}$$
$$(۱)\cap(۲)\ \ =[-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$$

توجه: برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع $y=\log_B^A$ باید $A>۰\ ,\ B>۰\ ,\ B\neq ۱$ باشد.

۸۲ - گزینه ۲

ابتدا تابع $f(-\frac{۱}{x})$ را تشکیل داده و در $f(x)$ ضرب می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x+۱}{x+a}\Rightarrow f(-\frac{۱}{x})=\frac{-\frac{۱}{x}+۱}{-\frac{۱}{x}+a}=\frac{\frac{-۱+x}{x}}{\frac{-۱+ax}{x}}=\frac{x-۱}{ax-۱}$$

$$f(x)\times f(\frac{-۱}{x})=-۱\Rightarrow\frac{x+۱}{x+a}\times\frac{(x-۱)}{ax-۱}=-۱\Rightarrow a=-۱$$

۸۳ - گزینه ۳ دقت کنید وقتی $x\geq ۱$ باشد، $۲-x\leq ۱$ است. به نحو مشابه اگر $x<۱$ باشد آنگاه $۳-۲x>۱$ است. پس:

$$fof(x)=f(f(x))=\begin{cases}۳-۲(۲-x)=۲x-۱ & x\geq ۱\\ ۲-(۳-۲x)=۲x-۱ & x<۱\end{cases}$$

بنابراین $fof(x)=۲x-۱$ ، یعنی $g(x)=۲x-۱$ پس $a=۲$ و $b=-۱$ و $a+b=۱$

۸۴ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$D_{fof}=\{x|x\in D_{f_{(x)}}, f(x)\in D_f\}$$

پس برای اینکه تابع $y=fof$ با دامنهٔ غیرتهی تعریف شود باید اشتراک دامنه و برد تابع f غیرتهی باشد یعنی با هم اشتراک داشته باشند.

دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[۰,a]$ و برد آن بازه‌ی $[۱,۳a+۱]$ می‌باشد. برای این که تابع fof با دامنه‌ی غیر تهی قابل تعریف باشد، لازم است داشته باشیم $[۰,a]\cap[۱,۳a+۱]\neq\phi$ و برای این کار لازم است $a\geq ۱$ باشد.

۸۵ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g$$
$$\left.\begin{array}{l}D_g=\{۱,۳,۵\}\\ D_f=\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow D_{f+g}=\{۱,۳,۵\}$$

زوج مرتب $f+g$ را محاسبه می‌کنیم و با $f+g$ خود سؤال مقایسه می‌نماییم.

$$f+g=\{(۱,۴),(۳,۱۱),(۵,۲۸)\}=\{(۱,a),(b,۱۱),(۵,۴c)\}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\ b=۳\\ c=۷\end{cases}\Rightarrow\frac{a+b}{c}=۱$$

۸۶ - گزینه ۳ ابتدا تابع $y=gof$ را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x)=g(\sqrt{x-۳})=(\sqrt{x-۳})^۲+۱=x-۳+۱=x-۲$$
$$D_{gof}: x\geq ۳$$

باتوجه به دامنه‌ی تابع gof داریم:

$$y=(gof)(x)=x-۲\xrightarrow{x\geq ۳}y\geq ۱$$

۸۷ - گزینه ۳ برای محاسبه‌ی $f \cdot g$ ابتدا دامنه‌ی تابع را می‌یابیم:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x} \Rightarrow D_f : x > 0 \\ g(x) = \sqrt{x}+1 \Rightarrow D_g : x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g = x > 0$$

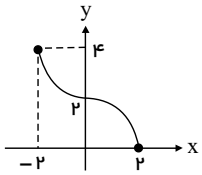
حال ضابطه‌ی تابع را می‌یابیم:

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x} \times (\sqrt{x}+1) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

در نهایت باتوجه به دامنه‌ی تابع، برد را می‌یابیم:

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 > -1$$
$$\Rightarrow f\cdot g \text{ برد تابع} = (-1, +\infty)$$

۸۸ - گزینه ۳ بنا به تعریف دامنه‌ی توابع ترکیبی داریم:



$$D_{fof} = \{x : x \in D_f \ , \ \ f(x) \in D_f\}$$

$$\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ f(x) \in D_f \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{0 \leq f(x) \leq 4} 0 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{fof} = [0, 2]$$

پس دامنه شامل ۳ عدد صحیح است.

۸۹ - گزینه ۲ برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع $g(f(x))$ ابتدا باید دامنه‌ی تابع $f(x)$ را پیدا کنیم. و سپس تابع $g(f(x))$ را تشکیل داده و دامنه‌ی آن را می‌یابیم و بعد اشتراک این دو را پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad (I)$$

$$y = g(f(x)) = \sqrt{f - f^2} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}\left(1 - \frac{1+x^2}{1-x^2}\right)} = \sqrt{\frac{-2(1+x^2)\cdot x^2}{(1-x^2)^2}}$$

$$D_{gof} : \frac{-2(1+x^2)\cdot x^2}{(1-x^2)^2} \geq 0$$

تابع gof همواره نا مثبت است و برای این که در زیر رادیکال قرار گیرد فقط می تواند صفر باشد پس دامنه ی این قسمت فقط $\{0\}$ است. (II)

$$I \cap II \Rightarrow \{0\}$$

۹۰ - گزینه ۲ برای آنکه خروجی ماشین داده شده برابر ۲ باشد، باید تابع را برابر مقدار داده شده قرار دهیم تا مقدار x یا همان مقدار ورودی به‌دست آید:

$$f(x) = (|x|+1)^2 \xrightarrow{\text{خروجی برابر } 2} (|x|+1)^2 = 2 \Rightarrow |x|+1 = \pm\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{|x|+1>0} |x|+1 = \sqrt{2} \Rightarrow |x| = \sqrt{2}-1 \Rightarrow x = \pm(\sqrt{2}-1) \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}-1 \\ \text{یا} \\ x = 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

۹۱ - گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = \{x \,|\, x \geq 0\}$$

$$g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow[x \leq 0]{-x \geq 0} D_g = \{x \,|\, x \leq 0\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\} = \{x \leq 0 \,|\, \sqrt{-x} \geq 0\}$$

$$= \{x \leq 0 \,|\, -x \geq 0\} = \{x \leq 0 \,|\, x \leq 0\} = \{x \,|\, x \leq 0\}$$

یعنی دامنهٔ تابع fog برابر بازهٔ $(-\infty, 0]$ است. حال برای یافتن برد تابع fog، آن‌را تشکیل می‌دهیم:

$$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{\sqrt{-x}} = \sqrt[4]{-x}\,,\ D_{fog} = \{x \,|\, x \leq 0\}$$

با یک عددگذاری ساده مشخص است که برد تابع fog بازهٔ $[0, +\infty)$ است.

۹۲ - گزینه ۱ با توجه به تابع g داریم: $g(-1) = 2$ بنابراین زمانی $g(f(a)) = 2$ است که $f(a) = -1$ باشد

$$f(a) = -1 \Rightarrow a^2 + 2a = -1 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

۹۳ - گزینه ۴ f تابعی خطی است که از نقاط $A(0, 2)$ و $B(-4, 0)$ می گذرد، پس باید معادلهٔ این خط را بیابیم:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \to \frac{y-2}{x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \to 2y - 4 = x \to 2y = x + 4 \to y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x+۲ \Rightarrow f(۲۰)=۱۰+۲=۱۲ \Rightarrow fof(۲۰)=f(f(۲۰))$$
$$=f(۱۲)=\frac{۱}{۲}\times ۱۲+۲=۶+۲=۸$$

۹۴ - گزینه ۳

$$fog(x)=f(g(x)) \quad , \quad D_{fog}=\{x\in D_g \text{ ، } g(x)\in D_f\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲\to ۳\to ۴ \Rightarrow (۲,۴) \\ ۳\to ۵\to \times \\ ۴\to ۷\to \times \end{array}\right\} \Rightarrow fog(x)=\{(۲,۴)\}$$

$$gof(x)=g(f(x)) \quad , \quad D_{gof}=\{x\in D_f \text{ ، } f(x)\in D_g\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۱\to ۲\to ۳ \Rightarrow (۱,۳) \\ ۲\to ۴\to ۷ \Rightarrow (۲,۷) \\ ۳\to ۴\to ۷ \Rightarrow (۳,۷) \end{array}\right\} \Rightarrow gof(x)=\{(۱,۳),(۲,۷),(۳,۷)\}$$

فقط در دامنه‌ی مشترک تفاضل را حساب می‌کنیم:

$$fog-gof=\{(۲,۴-۷)\}=\{(۲,-۳)\}$$

۹۵ - گزینه ۳

$$g(f(x))=۱+\frac{۱}{x^۲}$$
$$g(۱+x^۲)=۱+\frac{۱}{x^۲} \quad , \quad g(۳)=? \Rightarrow ۱+x^۲=۳ \Rightarrow x=\sqrt{۲} \Rightarrow g(۳)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۹۶ - گزینه ۳ برای به‌دست آوردن حاصل جمع دو تابع کافی است به‌ازای xهایی که در اشتراک دامنه‌های دو تابع قرار دارد، yها را با هم جمع کنیم:

$$D_f=(-\infty,۵] \qquad f(x)=\begin{cases} x & x\le ۲ \\ ۲ & ۲<x\le ۵ \end{cases}$$
$$D_g=[-۴,+\infty] \qquad g(x)=\begin{cases} ۳ & -۴\le x\le ۰ \\ -x+۳ & x>۰ \end{cases}$$

بنابراین $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-۴,۵]$ از سوی دیگر:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} x+۳ & -۴\le x\le ۰ \\ x+(-x+۳) & ۰<x\le ۲ \\ ۲+(-x+۳) & ۲<x\le ۵ \end{cases}$$
$$\Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases} x+۳ & -۴\le x\le ۰ \\ ۳ & ۰<x\le ۲ \\ -x+۵ & ۲<x\le ۵ \end{cases}$$

۹۷ - گزینه ۲ دامنهٔ f و g را از روی شکل می‌یابیم:

$$D_f=[-۲,۱] \quad , \quad D_g=[-۱,۰]$$
$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=[-۱,۰]$$

در این بازه به‌ازای نقاط مشخص بازه، حاصل $f(x)\times g(x)$ را بدست می‌آوریم، سپس با توجه به نمودارهای f و g، گزینهٔ درست را انتخاب می‌کنیم.

$$(f\times g)(-۱)=f(-۱)\times g(-۱)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۴}$$
$$(f\times g)(-\frac{۱}{۲})=f(-\frac{۱}{۲})\times g(-\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۱۶}$$
$$(f\times g)(۰)=f(۰)\times g(۰)=۱\times ۰=۰$$

فقط شکل گزینهٔ ۲ از این سه نقطه عبور می‌کند.

۹۸ - گزینه ۲

بنا به تعریف دامنهٔ توابع مرکب داریم:

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\in[-۲,۲], g(x)\in[۰,۲]\}$$
$$=\{x|x\in[-۲,۲], x\in[-۱,۱]\}=\{x|x\in[-۱,۱]\}=[-۱,۱]$$

توجه: برای یافتن جواب $g(x)\in[۰,۲]$، باید آن قسمت از دامنهٔ تابع $g(x)$ که بردشان در بازهٔ $[۰,۲]$ قرار دارد را پیدا کنیم که با توجه به شکل اگر برد $g(x)$ $[۰,۲]$ باشد دامنهٔ آن $[-۱,۱]$ است.

۹۹ - گزینه ۴ می‌دانیم $D_f: x\ge ۱$ و $D_g: -۱\le x<۱$ است.

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\ge ۱|-۱\le ۲-\sqrt{x-۱}<۱\}$$

باید جواب نامعادلهٔ $-1 \le 2 - \sqrt{x-1} < 1$ را پیدا کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ -1 \le 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} \le 3 \Rightarrow x-1 \le 9 \Rightarrow x \le 10 \\ 2)\ 2 - \sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} > 1 \Rightarrow x-1 > 1 \Rightarrow x > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 < x \le 10$$

$$D_{gof} = \{x \ge 1 | 2 < x \le 10\} = (2, 10]$$

۱۰۰ - گزینه ۴ دامنهٔ f از $x - 1 > 0$ به صورت $x > 1$ بدست می‌آید.

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$$

$$D_{gof} = \{x > 1 | \log(x-1) < 0\} \xrightarrow{x>1} x - 1 < (10)^0 \Rightarrow x < 2$$

با اشتراک‌گیری، دامنهٔ gof بازهٔ $(1, 2)$ خواهد بود که فاقد عدد صحیح است.

۱۰۱ - گزینه ۱ معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(-2, 0)$ و $(0, 2)$ را می‌یابیم و آن را برابر با عبارت $x + f(x-1)$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{y}{x+2} = \frac{0-2}{-2-0} = 1 \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow x + f(x-1) = x + 2$$

$$\Rightarrow f(x-1) = 2 \xrightarrow{x \to x+1} f(x) = 2$$

همچنین معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(0, 6)$ و $(6, 0)$ را یافته و برابر با عبارت $2x + g(x)$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{y-6}{x} = \frac{0-6}{6-0} = -1 \Rightarrow y - 6 = -x \Rightarrow y = -x + 6 \Rightarrow 2x + g(x) = -x + 6 \Rightarrow g(x) = -3x + 6$$

پس: $y = f(x) + g(x) = 2 + 6 - 3x = 8 - 3x \Rightarrow y = -3x + 8$

که نمودارش در گزینهٔ اول آمده است.

۱۰۲ - گزینه ۴ با توجه به نمودارهای داده شده، دامنهٔ توابع f و g و ضابطهٔ g را می‌یابیم.

$$D_f = [0, +\infty) \ , \ D_g = (-\infty, 0]$$

ضابطهٔ تابع خطی $g(x)$ را که از دو نقطهٔ $\left|\begin{array}{c}0\\-2\end{array}\right.$ و $\left|\begin{array}{c}-2\\0\end{array}\right.$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$\frac{y+2}{x} = \frac{-2-0}{0+2} = -1 \Rightarrow y + 2 = -x \Rightarrow y = -x - 2 \Rightarrow g(x) = -x - 2$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\} = \{x \le 0 \ , \ g(x) \ge 0\} = \{x \le 0 \ , \ -x - 2 \ge 0\} = \{x \le 0 \ , \ x \le -2\} = x \le -2$$

اعداد صحیح منفی که در دامنه حضور ندارند فقط -1 می‌باشد.

۱۰۳ - گزینه ۳ اول تابع $\frac{1}{g+1}$ را پیدا می‌کنیم:

$$g + 1 = \{(-1, 1), (2, 0), (3, 5)\} \Rightarrow \frac{1}{g+1} = \{(-1, 1), (\underbrace{2, \frac{1}{0}}_{\text{تعریف نشده}}), (3, \frac{1}{5})\}$$

$$\frac{1}{g+1} = \{(-1, 1), (3, \frac{1}{5})\}$$

حال $fo(\frac{1}{g+1})$ را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow fo(\frac{1}{g+1})(-1) = f(1) = \frac{3(1)-1}{2} = 1 \Rightarrow (-1, 1) \\ x = 3 \Rightarrow fo(\frac{1}{g+1})(3) = f(\frac{1}{5}) = \frac{\frac{3}{5} - 1}{2} = \frac{\frac{-2}{5}}{2} = -\frac{1}{5} \Rightarrow (3, -\frac{1}{5}) \end{array}\right\} \Rightarrow fo(\frac{1}{g+1}) = \{(-1, 1), (3, -\frac{1}{5}\}$$

مجموع عضوهای برد تابع برابر است با: $1 + (-\frac{1}{5}) = \frac{4}{5}$

۱۰۴ - گزینه ۱ ابتدا دامنهٔ توابع f و g را می‌یابیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \, ; x \ge 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \, ; x^2 \ne 0 \Rightarrow x \ne 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \geq ۰ | f(x) \neq ۰\}$

$f(x) \neq ۰ \Rightarrow \sqrt{x} \neq ۰ \Rightarrow x \neq ۰ \Rightarrow D_{gof} = (۰, +\infty)$

۱۰۵ - گزینه ۴

$f(x) = ۸x^۳ - ۱ \rightarrow f(g(x)) = ۸g^۳(x) - ۱ \quad (I)$

$(fog)(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ - ۱ \rightarrow f(g(x)) = (x+۱)^۳ - ۱ \quad (II)$

$(I),(II): ۸g^۳(x) - ۱ = (x+۱)^۳ - ۱ \rightarrow g^۳(x) = \frac{۱}{۸}(x+۱)^۳ \rightarrow g(x) = \frac{۱}{۲}(x+۱)$

پس: $(f+g)(-۱) = f(-۱) + g(-۱) = -۹ + ۰ = -۹$

۱۰۶ - گزینه ۴

$f(x) = ۵ - \sqrt{x-۳}\,,\ x - ۳ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۳ \Rightarrow D_f = [۳, +\infty)$

$D_{fof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_f\} = \{x \geq ۳ | f(x) \geq ۳\}$

$f(x) \geq ۳ \Rightarrow ۵ - \sqrt{x-۳} \geq ۳ \Rightarrow \sqrt{x-۳} \leq ۲ \Rightarrow x - ۳ \leq ۴ \Rightarrow x \leq ۷$

$D_{fof} = \{x \geq ۳ | x \leq ۷\} \Rightarrow D_{fof} = [۳, ۷] \Rightarrow a = ۳\,,\ b = ۷ \Rightarrow b - a = ۷ - ۳ = ۴$

۱۰۷ - گزینه ۲

$g(x) = \sqrt{-f(x)} \Rightarrow -f(x) \geq ۰ \Rightarrow f(x) \leq ۰ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۳ \Rightarrow D_g = [۱, ۳]$

$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in [۱, ۳]\} = \{x \in \mathbb{R} | ۱ \leq f(x) \leq ۳\}$

با توجه به نمودار f، به‌ازای $x = ۴$ و $-۱ \leq x \leq ۰$ مقادیر تابع f در بازهٔ $[۱, ۳]$ قرار دارند. داریم:

$۱ \leq f(x) \leq ۳ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۰, x = ۴ \Rightarrow D_{gof} = [-۱, ۰] \cup \{۴\}$

اعداد صحیح دامنهٔ gof عبارتند از: $-۱, ۰, ۴$

۱۰۸ - گزینه ۳ دامنهٔ تابع f به‌صورت $[۰, +\infty) - \{۱\}$ و دامنهٔ تابع g به‌صورت $\mathbb{R} - \{۱\}$ است. بنابراین داریم:

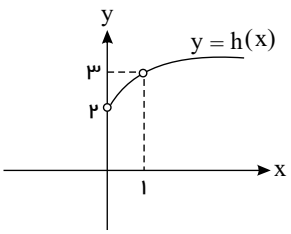
$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = (۰, +\infty) - \{۱\}$

دقت کنید که از $g(x) = ۰$ نتیجه می‌شود که $x = ۰$ است.

از طرف دیگر داریم:

$$h(x) = \frac{xf(x)}{g(x)} = \frac{x(\frac{\sqrt{x}+۲}{x^۳-۱})}{\frac{x}{x^۳-۱}} = \sqrt{x} + ۲$$

بنابراین نمودار تابع h به‌صورت زیر است.



$\Rightarrow R_h = (۲, +\infty) - \{۳\}$

اعداد طبیعی ۱، ۲ و ۳ در برد h قرار ندارند.

۱۰۹ - گزینه ۱

$f(x) = \sqrt{(\sqrt{x-۱}+۱)^۲} = |\sqrt{x-۱}+۱| = \sqrt{x-۱}+۱$

دامنهٔ تابع f بازهٔ $D_f = [۱, +\infty)$ است.

دامنهٔ تابع g، $\mathbb{R}$ است و برای دامنهٔ تابع gof داریم:

$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$

چون $D_g = \mathbb{R}$ است. $D_{gof} = D_f$ خواهد بود.

$\Rightarrow D_{gof} = [۱, +\infty)$

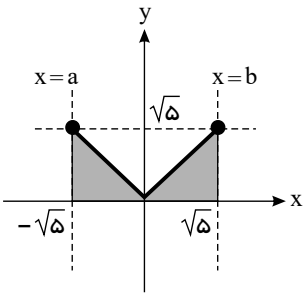
۱۱۰ - گزینه ۱

f دامنه : $۵ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{۵} \leq x \leq \sqrt{۵}$

$D_f = [-\sqrt{۵}, \sqrt{۵}], R_f = [۰, \sqrt{۵}] \Rightarrow D_{fof} = D_f = [-\sqrt{۵}, \sqrt{۵}]$

$(fof)(x) = \sqrt{۵ - \left(\sqrt{۵ - x^۲}\right)^۲} = \sqrt{x^۲} = |x|$

بنابراین برای نمودار تابع fof داریم:



مثلث‌های هاشورخورده، ناحیهٔ موردنظر هستند که مساحت آن برابر مجموع مساحت‌های مثلث‌ها یعنی $۲ \times \left(\frac{۵}{۲}\right) = ۵$ است.

۱۱۱ - گزینه ۱

$(۵, ۳) \in gof^{-۱} \Rightarrow g(f^{-۱}(۵)) \xlongequal{f(۴)=۵ \Rightarrow f^{-۱}(۵)=۴} g(۴) = ۳ \Rightarrow g^{-۱}(۳) = a = ۴$

$(-۱, ۱۰) \in gof \Rightarrow g(f(-۱)) = g(b) = ۱۰$

$\Rightarrow b = g^{-۱}(۱۰) = -۲ \Rightarrow g^{-۱}(a - b) \xlongequal{a=۴, b=-۲} g^{-۱}(۶) = ۲$