پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۳

$$[\frac{۲x+۱}{۳}]=۵ \Rightarrow ۵ \le \frac{۲x+۱}{۳} < ۶ \Rightarrow ۱۵ \le ۲x+۱ < ۱۸$$

$$\Rightarrow ۱۴ \le ۲x < ۱۷ \xrightarrow{\div ۲} ۷ \le x < \frac{۱۷}{۲} \xrightarrow{\times(-۱)} -\frac{۱۷}{۲} < -x \le -۷$$

بنابراین $[-x]$ می‌تواند مقادیر -۹ ,-۸ و -۷ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر -۲۴ است.

۲ ـ گزینه ۳ روش اول:

$$\underbrace{۴n^۲-۴n+۱}_{(۲n-۱)^۲} < ۴n^۲-۳n+۱ < \underbrace{۴n^۲}_{(۲n)^۲} \to ۲n-۱ < \sqrt{۴n^۲-۳n+۱} < ۲n \Rightarrow \left[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}\right]=۲n-۱$$

$$\underbrace{n^۲-۴n+۴}_{(n-۲)^۲} < n^۲-۲n < \underbrace{n^۲-۲n+۱}_{(n-۱)^۲} \to n-۲ < \sqrt{n^۲-۲n} < n-۱ \Rightarrow \left[\sqrt{n^۲-۲n}\right]=n-۲$$

$$\left[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}\right]-۲\left[\sqrt{n^۲-۲n}\right]=(۲n-۱)-۲(n-۲)=۳$$

روش دوم: کافی است یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ مثلاً $n=۳$ را قرار دهیم.

$$n=۳ \to \left[\sqrt{۳۶-۹+۱}\right]-۲\left[\sqrt{۹-۶}\right]=[\underbrace{\sqrt{۲۸}}_{۵/\cdots}]-۲[\underbrace{\sqrt{۳}}_{۱/\cdots}]=۵-۲(۱)=۳$$

۳ ـ گزینه ۳

زیر رادیکال باید بزرگ‌ترمساوی صفر باشد.

$$۴-x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ \le ۴ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲$$

در ضمن مخرج نباشد صفر باشد:

$$[\frac{x}{۲}]=۱ \Rightarrow ۱ \le \frac{x}{۲} < ۲ \Rightarrow ۲ \le x < ۴$$

$$D_f=[-۲,۲]-[۲,۴)=[-۲,۲)=[a,b) \to b-a=۲-(-۲)=۴$$

۴ ـ گزینه ۴ گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ را با مثال نقض می‌توان رد کرد یعنی:

(گزینهٔ ۱ $[x+y]=[x]+[y]\ ,\ x=۱/۶\ ,\ y=۲/۷ \Rightarrow [۱/۶+۲/۷]=[۱/۶]+[۲/۷]$

$\Rightarrow [۴/۳]=۱+۲ \Rightarrow ۴=۳$ **نادرست**

(گزینهٔ ۲ $[xy]=[x][y]\ ,\ x=۲\ ,\ y=۱/۶ \Rightarrow [۲\times ۱/۶]=[۲][۱/۶]$

$\Rightarrow [۳/۲]=۲\times ۱ \Rightarrow ۳=۲$ **نادرست**

(گزینهٔ ۳ $[x-y]=[x]-[y]\quad x=۳\ ,\ y=۱/۵ \Rightarrow [۳-۱/۵]=[۳]-[۱/۵]$

$\Rightarrow [۱/۵]=۳-۱ \Rightarrow ۱=۲$ **نادرست**

می‌دانیم عدد صحیح در جمع و تفریق می‌تواند از داخل براکت خارج شود یعنی:

$$a\in\mathbb{Z}\ ,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow [x\pm a]=[x]\pm a \Rightarrow [x+۱]=[x]+۱$$

۵ ـ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۳^{-[x]}}{۳^{[-x]}}=۳^{-[x]-[-x]}=۳^{-([x]+[-x])}=(\frac{۱}{۳})^{[x]+[-x]}$$

از طرفی می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & ;\ x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & ;\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$**، لذا برای مجموعهٔ** $\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\cdots,\sqrt{۱۰}\}$ **اعداد** $\sqrt{۱}\ ,\ \sqrt{۴}\ ,\ \sqrt{۹}$ **اعداد صحیح هستند، پس داریم:**

$$x\in\mathbb{Z} \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^{[x]+[-x]}=(\frac{۱}{۳})^{۰}=۱$$

و برای بقیهٔ اعداد که صحیح نیستند، داریم:

$$x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^{[x]+[-x]}=(\frac{۱}{۳})^{-۱}=۳$$

$$f(\sqrt{۱})+f(\sqrt{۲})+\cdots+(\sqrt{۱۰})=(f(\sqrt{۱})+f(\sqrt{۴})+f(\sqrt{۹}))+(f(\sqrt{۲})+f(\sqrt{۳})+f(\sqrt{۵})$$

$$+f(\sqrt{۶})+f(\sqrt{۷})+f(\sqrt{۸})+f(\sqrt{۱۰}))=۳\times ۱+۷\times ۳=۲۴$$

۶ - گزینه ۲

$$f(x)=[3x]\,,\ x=-\frac{3}{2}\Rightarrow y=f(-\frac{3}{2})=[-\frac{9}{2}]=-5\Rightarrow A(-\frac{3}{2},-5)$$

حال باید معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $A(-\frac{3}{2},-5)$ و $B(-\frac{5}{2},0)$ را به دست آوریم.

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y+5}{x+\frac{3}{2}}=\frac{-5-0}{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=-5\to y+5=-5x-\frac{15}{2}\to y=-5x-\frac{25}{2}$$

نقطهٔ گزینهٔ ۲ یعنی نقطهٔ $(\frac{1}{2},-15)$ در این خط صدق می‌کند.

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{5}{2}-\frac{25}{2}=-\frac{30}{2}=-15$$

۷ - گزینه ۲ ابتدا برد عبارت داخل براکت را می‌یابیم و سپس از برد تابع، جزء صحیح گرفته و اعداد صحیح آن را می‌شماریم.

$$1<x<2\xrightarrow{\text{به توان ۲}}1<x^2<4\xrightarrow{\times(2)}2<2x^2<8$$

$$\xrightarrow{+1}3<2x^2+1<9\Rightarrow[2x^2+1]=3,4,5,6,7,8$$

۶ مقدار برای این عبارت وجود دارد.

۸ - گزینه ۳

نکته : $|A|=-A\Rightarrow A\le 0$

$$|x^2-2x|+x^2=2x\Rightarrow|x^2-2x|=-x^2+2x\Rightarrow|x^2-2x|=-(x^2-2x)$$

$$\Rightarrow x^2-2x\le 0\Rightarrow 0\le x\le 2\xrightarrow{\times 3}0\le 3x\le 6\Rightarrow 0-4\le 3x-4\le 6-4$$

$$\Rightarrow -4\le 3x-4\le 2\Rightarrow -\frac{4}{5}\le\frac{3x-4}{5}\le\frac{2}{5}\Rightarrow\left[\frac{3x-4}{5}\right]=-1\ \text{یا}\ 0$$

۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: $[x]=n\Rightarrow\ n\le x<n+1$

$$\left[\frac{x}{3-2x}\right]=1\Rightarrow\ 1\le\frac{x}{3-2x}<2\xrightarrow{\text{طرفین نامعادله را عکس میکنیم}}\frac{1}{2}<\frac{3-2x}{x}\le 1\ \to\frac{1}{2}<\frac{3}{x}-2\le 1$$

$$\xrightarrow{+2}\frac{5}{2}<\frac{3}{x}\le 3\to\frac{1}{3}\le\frac{x}{3}<\frac{2}{5}\xrightarrow{\times 15}5\le 5x<6\Rightarrow[5x]=5$$

۱۰ - گزینه ۲

$$f(x)=\left|3x-[3x+\frac{5}{2}]\right|=\left|(3x+\frac{5}{2})-[3x+\frac{5}{2}]-\frac{5}{2}\right|$$

$$\xrightarrow{0\le a-[a]<1}0\le(3x+\frac{5}{2})-[3x+\frac{5}{2}]<1\Rightarrow-\frac{5}{2}\le(3x+\frac{5}{2})-[3x+\frac{5}{2}]-\frac{5}{2}<-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}<\left|(3x+\frac{5}{2})-[3x+\frac{5}{2}]-\frac{5}{2}\right|\le\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}<f(x)\le\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow R_f=(\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$$

۱۱ - گزینه ۱ می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ و باتوجه به این که عبارت $\sin\pi x-1$ زیر رادیکال با فرجه زوج قرار دارد، بنابراین باید نامنفی باشد، داریم:

$$\sin\pi x-1\ge 0\Rightarrow\sin\pi x\ge 1$$

می‌دانیم همواره $\sin u\le 1$ است، بنابراین تنها در صورتی نامساوی فوق برقرار است که $\sin\pi x=1$ باشد، لذا داریم:

$$\sin\pi x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص معادلات سینوسی}}\pi x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x\in\left\{2k+\frac{1}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$$

نابراین دامنه تابع f به صورت زیر است:

$$D_f=\left\{x\,|x=2k+\frac{1}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$$

اتوجه به دامنه فوق، تمام ورودی‌های تابع f، اعدادی غیر صحیح هستند، لذا داریم:

$$f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin\pi x-1}=-1+0=-1\Rightarrow f(-\frac{1}{2}f(x))=f(\frac{1}{2})=-1+0=-1$$

بنابراین برای هر x از دامنه f، حاصل $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ برابر با ۱- است.

۱۲ - گزینه ۳

$$f(x[x]) = x + [x] \ , \ f(\frac{۱۷}{۴}) = ?$$

برای محاسبهٔ $f(\frac{۱۷}{۴})$ باید x را چنان بیابیم که $x[x] = \frac{۱۷}{۴}$ باشد، داریم:

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow x \times ۰ = \frac{۱۷}{۴} \Rightarrow ۰ = \frac{۱۷}{۴} \text{ غلط}$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow x \times ۱ = \frac{۱۷}{۴} \Rightarrow x = \frac{۱۷}{۴} \text{ غلط ، } \frac{۱۷}{۴} \notin [۱, ۲)$$

$$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow x \times ۲ = \frac{۱۷}{۴} \Rightarrow x = \frac{۱۷}{۸} \text{ قابل‌قبول}$$

چون $۲ \leq \frac{۱۷}{۸} < ۳$، پس $x = \frac{۱۷}{۸}$ قابل‌قبول است، داریم:

$$x = \frac{۱۷}{۸} \Rightarrow f(\frac{۱۷}{۸}[\frac{۱۷}{۸}]) = \frac{۱۷}{۸} + [\frac{۱۷}{۸}] \Rightarrow f(\frac{۱۷}{۸} \times ۲) = \frac{۱۷}{۸} + ۲ \Rightarrow f(\frac{۱۷}{۴}) = \frac{۳۳}{۸}$$

۱۳ - گزینه ۲ تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت مقابل درنظر گرفت:

$$f(x) = \begin{cases} ۲^{۰} = ۱ & x \in \mathbb{Z} \\ ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲} & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f(۱) = f(۲) = f(۳) = \ldots = f(۹۹) = f(۱۰۰) = ۱ \Rightarrow \text{تعداد ۱۰۰ تا}$$

$$f(۰/۵) = f(۱/۵) = \ldots = f(۹۸/۵) = f(۹۹/۵) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{تعداد ۱۰۰ تا}$$

$$\text{حاصل عبارت} = ۱ \times ۱۰۰ + \frac{۱}{۲} \times ۱۰۰ = ۱۵۰$$