پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ روش اول: باید حدود تغییرات تابع $\sqrt{۲}f(x-۱)+۱$ را بیابیم. بنابراین تابع را می‌سازیم

$$-\sqrt{۳} \le f(x) \le ۲ \Rightarrow -\sqrt{۳} \le f(x-۱) \le ۲ \Rightarrow -\sqrt{۶}+۱ \le \sqrt{۲}f(x-۱)+۱ \le ۲\sqrt{۲}+۱$$

اگر مقادیر تقریبی $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲}$ را به ترتیب ۲٫۵ و ۱٫۴ در نظر بگیریم، آنگاه برد تابع مورد نظر، بازه‌ی $[-۱٫۵\,,\,۳٫۸]$ خواهد بود که شامل ۵ عدد صحیح است.

روش دوم: چون برد تابع مد نظر است پس تغییرات x هیچ تأثیری ندارد، بنابراین با توجه به ضابطه‌ی خواسته شده کافی است برد تابع را $\sqrt{۳}$ برابر کرده و یک واحد به آن اضافه کنیم. پس:

$$R=\left[-\sqrt{۶}+۱\,,\,۲\sqrt{۲}+۱\right]$$

این مجموعه شامل اعداد صحیح $\{-۱\,,\,۰\,,\,۱\,,\,۲\,,\,۳\}$ می‌باشد.

۲ - گزینه ۲ برای $x>-۲$ نقطه رأس سهمی $x=-۱$ است، پس داریم:

$$x>-۲ \Rightarrow f(x)=-(x-a)^۲+۳ \Rightarrow \text{رأس } x=a \Rightarrow \boxed{a=-۱}$$

برای $x<-۲$ تابع ثابت $f(x)=۲$ تعریف شده است، پس داریم:

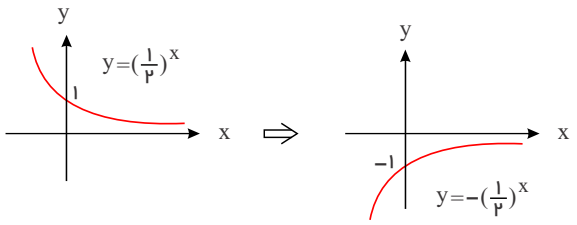
$$x<-۲ \Rightarrow f(x)=a+c \Rightarrow a+c=۲ \Rightarrow -۱+c=۲ \Rightarrow \boxed{c=۳}$$

$$x=-۲ \Rightarrow f(-۲)=۰ \Rightarrow b(-۲)^۲-c(-۲)+۲b=۰ \Rightarrow ۴b+۲c+۲b=۰ \Rightarrow ۶b=-۲c$$

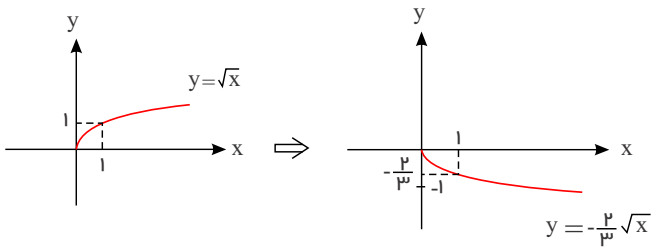
$$\Rightarrow ۶b=-۲\times ۳=-۶ \Rightarrow \boxed{b=-۱}$$

۳ - گزینه ۴

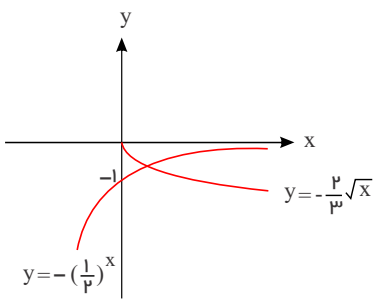
$y=-۲^{-x}=-(\frac{۱}{۲})^x$



$y=-\frac{۲}{۳}\sqrt{x}$



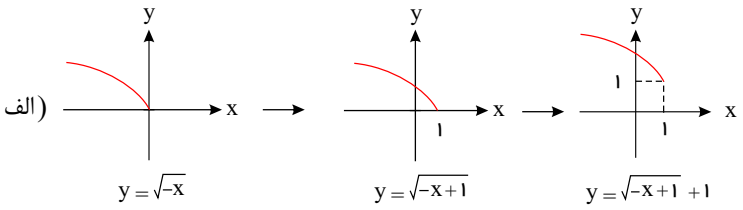
حال نمودار دو تابع $y=-۲^{-x}$ و $y=-\frac{۲}{۳}\sqrt{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



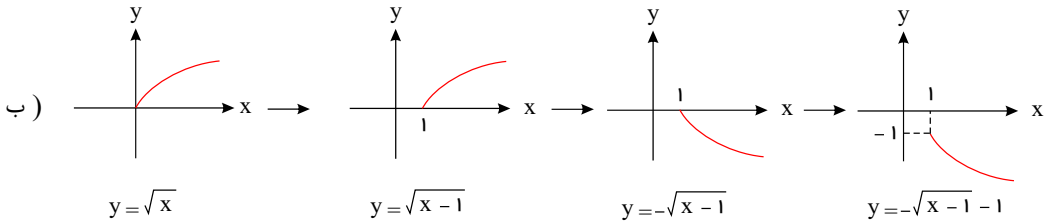
دو تابع $y=-۲^{-x}$ و $y=-\frac{۲}{۳}\sqrt{x}$ در یک نقطه متقاطع‌اند.

۴ - گزینه ۲ تک تک ضابطه‌های داده شده را به کمک انتقال رسم می‌کنیم.

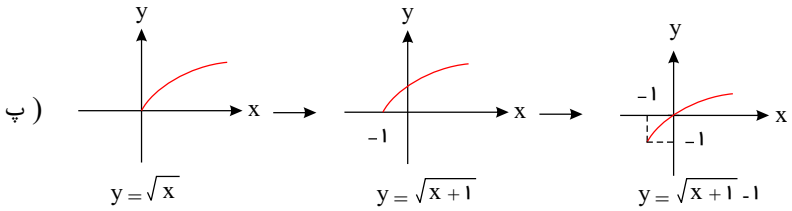
الف) غلط است.



ب) صحیح است.



پ) غلط است.



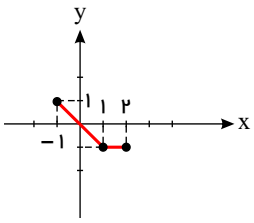
۵ ـ گزینه ۱

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}}y=f(x+۱)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}}y=f(-x+۱)\xrightarrow{\text{دوبرابر کردن عرض نقاط}}y=۲f(-x+۱)$$

۶ ـ گزینه ۲

برای پیدا کردن نمودار $y=-f(x+۲)$ از روی نمودار تابع f ،ابتدا نمودار را دو واحد به طرف چپ و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

نمودار حاصل شکل زیر است:



۷ ـ گزینه ۱

$$f(x)=\sqrt{x-۱}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}}y=\sqrt{-x-۱}$$

$$\xrightarrow[x\to x-۴]{\text{۴ واحد به سمت راست}}y=\sqrt{-(x-۴)-۱}=\sqrt{۳-x}=g(x)$$

حال g را با محور طول‌ها تقاطع می‌دهیم:

$$g(x)=۰$$

$$\Rightarrow\sqrt{۳-x}=۰\Rightarrow x=۳$$

۸ ـ گزینه ۴

$$g(x)=f(۲x-۱)\xrightarrow[x\to\frac{۱}{۲}x]{\text{طول‌ها دو برابر}}g_۱(x)=f(x-۱)\xrightarrow[x\to x+۳]{\text{سه واحد چپ}}g_۲(x)=f(x+۲)\xrightarrow[x\to ۳x]{\text{طول‌ها } \frac{۱}{۳} \text{ برابر}}h(x)=f(۳x+۲)$$

پس: $-۱\le x\le ۳\xrightarrow{\text{طول‌ها دو برابر}}-۲\le x\le ۶\xrightarrow{\text{سه واحد چپ}}-۵\le x\le ۳\xrightarrow{\text{طول‌ها } \frac{۱}{۳} \text{ برابر}}-\frac{۵}{۳}\le x\le ۱$

۹ ـ گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(۲(x+۱)-۱)=f(۲x+۱)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-۲x+۱)$ به دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم یعنی به جای x جملهٔ $\frac{۱}{۲}x$ قرار می‌دهیم. نمودار تابع $y=f(-x+۱)$ به دست می‌آید.

۱۰ - گزینه ۲ اگر نمودارتابع $y=|\frac{1}{2}x|-2$ را ۴ واحد به سمت چپ منتقل کنیم معادله به‌صورت $y=|\frac{1}{2}(x+4)|-2$ درمی‌آید و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم به‌صورت $y=|\frac{1}{2}(x+4)|-2+1$ درمی‌آید.

$$\begin{cases} y_{\text{قدیم}}=|\frac{1}{2}x|-2 \\ y_{\text{جدید}}=|\frac{1}{2}x+2|-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} |\frac{1}{2}x|-2=|\frac{1}{2}x+2|-1$$

$$\xrightarrow{\times 2} |x|-4=|x+4|-2 \Rightarrow |x|-|x+4|=2 \xrightarrow{\text{مشاهده‌ی گزینه‌ها}} x=-3$$

۱۱ - گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} g(x)=\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{دو واحد به طرف } x \text{ های}} h(x)=\sqrt{-(x-2)}=\sqrt{-x+2}$$

$$\begin{cases} h(x)=\sqrt{-x+2} \\ y=x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x+2}=x \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x+2=x^2 \to x^2+x-2=0$$

$$\to (x+2)(x-1)=0 \to \begin{cases} x=-2 & \text{غ‌ق‌ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ x=1 & \text{ق‌ق} \end{cases}$$

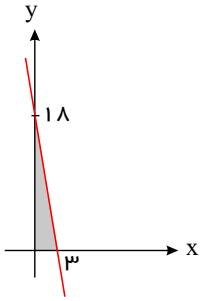
۱۲ - گزینه ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع خطی $g(x)$ را به دست می‌آوریم. برای این کار باید معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطه $A(0,3)$ و $B(3,0)$ را به دست آوریم.

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \to \frac{y-3}{x}=\frac{3}{-3}=-1 \to y-3=-x \to y=-x+3 \to g(x)=-x+3 \to f(x)=-x+5$$

پس: $h(x)=3(-(2x-1)+5) \to h(x)=-6x+18$

یک بار به x و بار دیگر به y صفر می‌دهیم:

$$x=0 \to y=18 \ , \ y=0 \to x=3$$



$$\longrightarrow S=\frac{1}{2}\times 3\times 18=27$$

۱۳ - گزینه ۲

روش اول:

$$A(-1,3)\in f \Rightarrow f(-1)=3 \quad , \quad 2x-5=-1 \Rightarrow x=2$$

$$y(2)=3f(-1)-7=3\times 3-7=2 \Rightarrow A'(2,2) \Rightarrow a=2 \ , \ b=2 \Rightarrow a-b=0$$

پس: $y(2)=3f(-1)-7=3(3)-7=2 \to A'\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right. \xrightarrow{a=2 \ , \ b=2} a-b=0$

روش دوم: تابع f پنج واحد به سمت راست برده شده و سپس طول‌هایش نصف شده و عرض‌هایش ۳ برابر شده و نهایتاً ۷ واحد به پایین برده شده است.

$$\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{پنج واحد راست}} \left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طول‌ها نصف}} \left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{عرض ۳ برابر}} \left|\begin{matrix}2\\9\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{هفت واحد پایین}} A'\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right.$$

پس $a-b=0$ است.

۱۴ - گزینه ۳ ابتدا در مرحله‌ی اول، نمودار f را در راستای محور yها، با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض کرده و در مرحله دوم، آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. در مرحله‌ی سوم، نمودار را سه واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y=f(x) \xrightarrow{(1)} y=\frac{f(x)}{2} \xrightarrow{(2)} y=\frac{-f(x)}{2} \xrightarrow{(3)} y=\frac{-f(x+3)}{2}$$

۱۷ - گزینه ۴

$$2x-x^2\geq 0 \Rightarrow x(2-x)\geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} > 0 & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array} \Rightarrow 0\leq x\leq 2$$

حال برای پیدا کردن دامنهٔ $f(3-x)$ کافی است $3-x$ را بین صفر و ۲ قرار دهیم.

$$0 \le 3 - x \le 2 \Rightarrow -3 \le -x \le -1 \Rightarrow 3 \ge x \ge 1 \Rightarrow x \in [1,3]$$

البته می‌توانید ابتدا ضابطهٔ $f(3-x)$ را به‌دست آورید و سپس زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

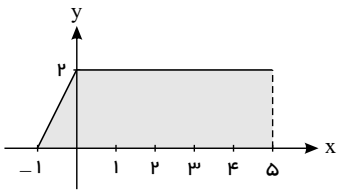
۱۶ - گزینه ۲

$$y = f(x) \xrightarrow[x \to x+1]{\text{۱ واحد انتقال به چپ}} f(x+1) \xrightarrow[x \to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} f(-x+1)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} -f(-x+1) \xrightarrow{\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{1}{4}} y = -\frac{1}{4}f(-x+1)$$

۱۷ - گزینه ۲

$$\begin{matrix} x \ge 0 \Rightarrow y = f(x-x) = f(0) = 2 \\ x < 0 \Rightarrow y = f(x-(-x)) = f(2x) \end{matrix} \Rightarrow y = \begin{cases} 2 & x \ge 0 \\ f(2x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



مساحت $S = \frac{1}{2}(5+6) \times 2 = 11$

۱۸ - گزینه ۱ می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به‌جای x عبارت $x-3$ و برای اینکه به طرف y های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد -2 اضافه شود؛ بنابراین داریم:

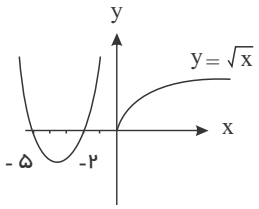
$$y = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

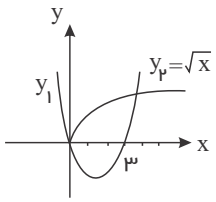
$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x-4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

۱۹ - گزینه ۲

با رسم دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = (x+2)(x+5)$ معلوم است که این دو تابع نقطهٔ برخوردی ندارند.



حال اگر ۵ واحد منحنی درجه دوم را به راست منتقل کنیم تلاقی این دو منحنی یک نقطه به طول مثبت و نقطهٔ دیگر مبدأ خواهد بود پس باید بیش از ۵ واحد به سمت راست منتقل شود.



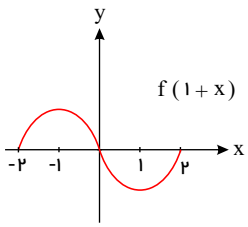
۲۰ - گزینه ۴ باید مراحل گفته شده را به‌صورت برعکس از انتها به ابتدا انجام دهیم، که داریم:

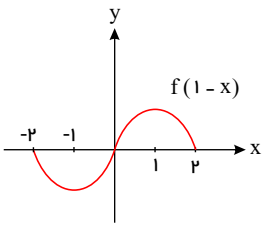
$$y = -|3x-12| = -3|x-4| \xrightarrow{\text{انقباض در راستای عمودی با ضریب } \frac{1}{3}} y = \frac{1}{3} \times (-3)|x-4| = -|x-4|$$

$$\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = |x-4| \xrightarrow[x \to x+2]{\text{۲ واحد انتقال به چپ}} y = |x+2-4| = |x-2|$$

۲۱ - گزینه ۴

نمودار تابع $y = f(1-x)$ را با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ رسم می‌کنیم:





برای رسم نمودار $f(1-x)$، نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ می‌بریم و برای رسم نمودار $f(1-x)$، نمودار تابع $f(1+x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. مطابق شکل نمودار حاصل در فاصله‌های $[-2,-1]$ و $[1,2]$ اکیداً نزولی است.

۲۲ - گزینه ۱

$$y = x^{۲} - x - ۳ \xrightarrow[x \to x+۲]{\text{۲ واحد به چپ}} y = (x+۲)^{۲} - (x+۲) - ۳ \xrightarrow{\text{۹ واحد پایین}} y = (x+۲)^{۲} - (x+۲) - ۳ - ۹$$

نمودار زیر محور xها قرار دارد یعنی باید نامعادلهٔ $y < ۰$ را حل کنیم.

$$y < ۰ \Rightarrow (x+۲)^{۲} - (x+۲) - ۱۲ < ۰ \Rightarrow x^{۲} + ۴x + ۴ - x - ۲ - ۱۲ < ۰$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۳x - ۱۰ < ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۵) < ۰ \Rightarrow -۵ < x < ۲ \Rightarrow x \in (-۵, ۲)$$

۲۳ - گزینه ۳ به ترتیب اعمال مورد نظر داریم:

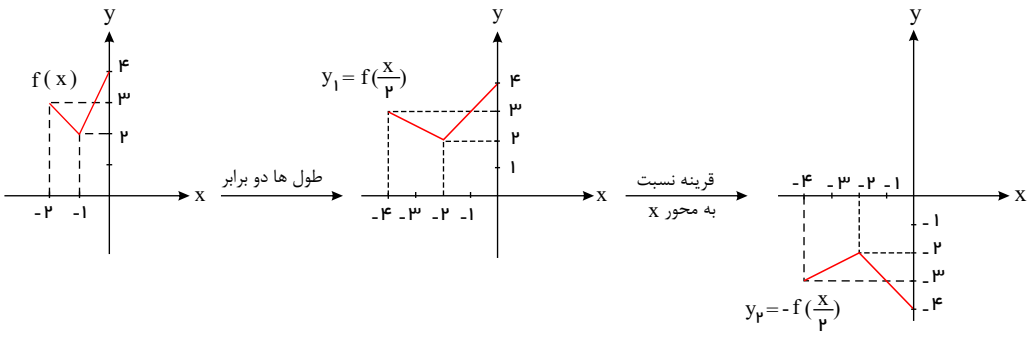
$$f(x) = x^{۲} \xrightarrow{\text{۴ واحد انتقال به طرف } x \text{ های منفی}} f_{۱}(x) = (x+۴)^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} f_{۲}(x) = -(x+۴)^{۲} \xrightarrow{\text{دو برابر کردن برد}} f_{۳}(x) = -۲(x+۴)^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد انتقال به طرف } y \text{ های منفی}} f_{۴}(x) = -۲(x+۴)^{۲} - ۳ \to f_{۴}(x) = -۲(x^{۲} + ۸x + ۱۶) - ۳$$

در نتیجه $y = -۲x^{۲} - ۱۶x - ۳۵$

۲۴ - گزینه ۲ نمودار $h(x) = f(x-۱) - ۲$ را یک واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.



۲۵ - گزینه ۳ نمودار $f(x)$ در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط شده و سپس یک واحد به بالا رفته است، پس داریم:

$$f(x) \xrightarrow{x \to \frac{۱}{۲}x} f\left(\frac{۱}{۲}x\right) \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} f\left(\frac{۱}{۲}x\right) + ۱ \Rightarrow g(x) = f\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$$

۲۶ - گزینه ۱

$$y = f(۲-x) \xrightarrow[x \to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y} y_{۱} = f(x+۲) \xrightarrow[x \to x+۲]{\text{۲ واحد چپ}} y_{۲} = f(x+۴) \xrightarrow{\text{طول‌ها } \frac{۱}{۳} \text{ برابر}} g(x) = f(۳x+۴)$$

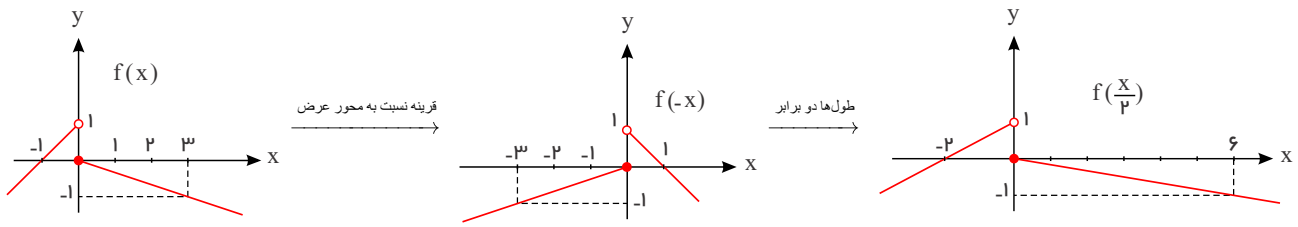
$$\text{پس: } -۱ \le x \le ۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} -۲ \le x \le ۱ \xrightarrow{\text{۲ واحد چپ}} -۴ \le x \le -۱ \xrightarrow{\text{طول‌ها } \frac{۱}{۳} \text{ برابر}} -\frac{۴}{۳} \le x \le -\frac{۱}{۳}$$

۲۷ - گزینه ۲ با توجه به مراحل گفته شده داریم:

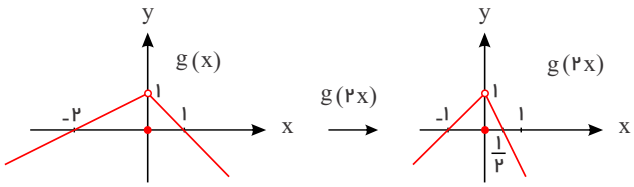
$$y = f(x) \xrightarrow[x \to -x]{\text{قرینه نسبت به } y \text{ ها}} f(-x) \xrightarrow[x \to x-۲]{\text{۲ واحد به راست}} f(-(x-۲)) = f(-x+۲)$$

$$\xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}} g(x) = ۲f(-x+۲)$$

۲۸ - گزینه ۴ ابتدا نمودارهای $f(-x)$ و $f(\frac{x}{۲})$ را رسم و به کمک آن $g(x)$ را رسم می‌کنیم:

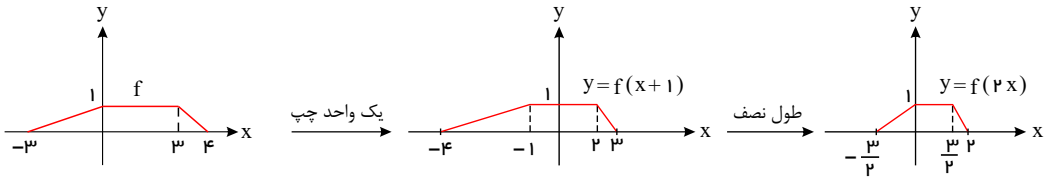


$$g(x)=\begin{cases} f(-x) & ; x>0 \\ f(\frac{x}{2}) & ; x\le 0 \end{cases} \longrightarrow$$

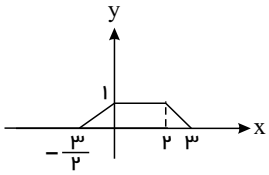


۲۹ - گزینه ۳

برای رسم $f(x+1)$ باید $f(x)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، همچنین برای رسم $f(2x)$ باید طول نقاط $f(x)$ را بر ۲ تقسیم کنیم، پس داریم:



$$g(x)=\begin{cases} f(x+1) & ; x\ge 0 \\ f(2x) & ; x<0 \end{cases} \longrightarrow$$



$$\longrightarrow S=\frac{(4.5+2)\times 1}{2}=\frac{6.5}{2}=\frac{13}{4}$$

۳۰ - گزینه ۳ روش اول: با توجه به نمودار تابع f، دامنهٔ آن بصورت $D_f=[-4,7]$ می‌باشد. پس داریم:

$$y=2f(2x-1)\Rightarrow -4\le 2x-1\le 7\Rightarrow -4+1\le 2x-1+1\le 7+1\Rightarrow -3\le 2x\le 8$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}\le x\le 4\Rightarrow \text{اعداد صحیح}: -1,0,1,2,3,4\Rightarrow \text{عدد } 6$$

روش دوم: تابع f را باید یک واحد به سمت راست برده و سپس طول‌های نقاطش را نصف و عرض‌ها را دو برابر کنیم (دو برابر کردن عرض‌ها روی دامنه تاثیر ندارد).

$$-4\le x\le 7 \xrightarrow{\text{یک واحد راست}} -3\le x\le 8 \xrightarrow{\text{طول‌ها نصف}} -\frac{3}{2}\le x\le 4$$

که اعداد صحیح آن عبارتند از $-1,0,1,2,3,4$

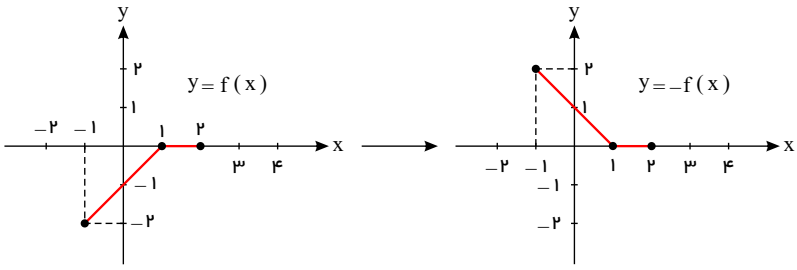
۳۱ - گزینه ۴

$$f(x)=(x+1)^2 \xrightarrow[x\to x-2]{\text{۲ واحد به راست}} y=(x-2+1)^2=(x-1)^2 \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} g(x)=(x-1)^2-1$$

$$f(x)=g(x)\Rightarrow (x+1)^2=(x-1)^2-1\Rightarrow x^2+2x+1=x^2-2x+1-1\Rightarrow 4x=-1$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{4}\Rightarrow f(-\frac{1}{4})=(-\frac{1}{4}+1)^2=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$$

۳۲ - گزینه ۳ برای پیدا کردن نمودار $y=f(x)$ از روی نمودار $y=f(x-2)+1$، ابتدا نمودار را دو واحد به‌طرف چپ و سپس یک واحد به‌طرف پایین انتقال می‌دهیم. در نهایت نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-f(x)$ به‌دست آید.



۳۳ - گزینه ۲

$$y=\log_2^{(x+a)}-b \xrightarrow{\text{۲ واحد بالا}} y=\log_2^{(x+a)}-b+2 \xrightarrow[x\to x+3]{\text{۳ واحد به چپ}} y=\log_2^{(x+3+a)}-b+2$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{دامنه از روی شکل}: x>-2 \\ \text{دامنه از روی ضابطه}: x+3+a>0\Rightarrow x>-3-a \end{array}\right\}\Rightarrow -3-a=-2\Rightarrow a=-1$$

$$y=\log_{۲}^{(x+۲)}-b+۲\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x=۰\\y=۲\end{array}\right.\Rightarrow ۲=\log_{۲}^{۲}-b+۲\Rightarrow ۰=۱-b\Rightarrow b=۱$$

$$a-b=-۱-۱=-۲$$

۳۴ - گزینه ۴ نقطهٔ $A(۴,۵)$ روی نمودار $y=f(۱-x)+a$ قرار دارد یعنی:

$$\left|\begin{array}{l}x=۴\\y=۵\end{array}\right.\Rightarrow ۵=f(۱-۴)+a\Rightarrow ۵=f(-۳)+a\Rightarrow f(-۳)=۵-a$$

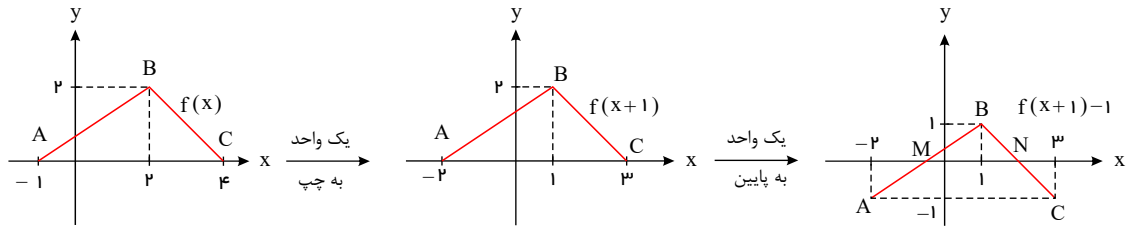
رابطهٔ فوق یعنی نقطهٔ $(-۳,۵-a)$ روی تابع $y=f(x)$ قرار دارد. از طرفی نقطهٔ $A'(b,۴)$ متناظر با نقطهٔ A روی تابع $y=f(۲x-۱)$ است یعنی:

$$\left|\begin{array}{l}x=b\\y=۴\end{array}\right.\Rightarrow ۴=f(۲b-۱)\Rightarrow(۲b-۱,۴)\in f$$

نقاط $(-۳,۵-a)$ و $(۲b-۱,۴)$ یک نقطه هستند، پس داریم:

$$۲b-۱=-۳\Rightarrow ۲b=-۲\Rightarrow b=-۱,۵-a=۴\Rightarrow a=۱\Rightarrow a+b=۱+(-۱)=۰$$

۳۵ - گزینه ۴ برای رسم نمودار تابع $y=f(x+۱)-۱$ داریم:

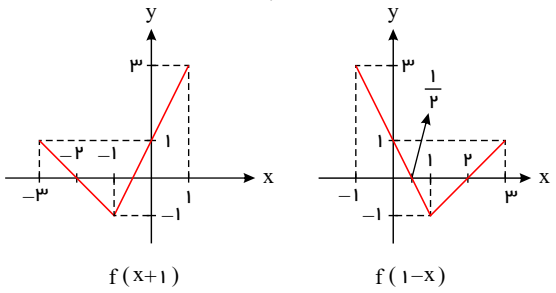


طبق قضیهٔ تالس طول پاره‌خط MN، نصف طول پاره‌خط AC است و داریم:

$$MN=\frac{۵}{۲}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MBN}}=\frac{۱}{۲}(۱)(\frac{۵}{۲})=\frac{۵}{۴}$$

۳۶ - گزینه ۴

$$f(x)\xrightarrow[\text{یک واحد به چپ}]{x\to x+۱}f(x+۱)\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}]{x\to -x}y=f(-x+۱)$$



$$g(x)=\sqrt{f(۱-x)}\Rightarrow f(۱-x)\geq ۰\Rightarrow[-۱,\frac{۱}{۲}]\cup[۲,۳]$$

۳۷ - گزینه ۴ نقطهٔ $(۳,-۲)$ روی تابع $y=-f(x-۱)$ است، پس داریم:

$$-۲=-f(۳-۱)\Rightarrow f(۲)=۲$$

$۲x+۱$ را مساوی ۲ قرار می‌دهیم:

$$۲x+۱=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

در تابع دوم، به‌جای x، $\frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$y=۲f(۲x+۱)-۱\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}y=۲\underbrace{f(۲)}_{۲}-۱=۳$$

پس نقطهٔ (a,b) به‌صورت $(\frac{۱}{۲},۳)$ در می‌آید و داریم:

$$a+b=\frac{۱}{۲}+۳=۳/۵$$

۳۸ - گزینه ۳ با توجه به نمودار تابع f، دامنهٔ آن بازهٔ $(-۱,۲]-\{۰\}$ و برد آن بازهٔ $(۰,۲]$ است.

$$D_g : \begin{cases} -۱ < ۱ - \frac{x}{۳} \le ۲ \Rightarrow -۱ \le \frac{x}{۳} < ۲ \Rightarrow -۳ \le x < ۶ \\ ۱ - \frac{x}{۳} = ۰ \Rightarrow x \ne ۳ \end{cases} \Rightarrow D_g = [-۳, ۶) - \{۳\}$$

$$R_g : ۰ < f \le ۲ \Rightarrow -۱ < ۴f - ۱ \le ۷ \Rightarrow R_g = (-۱, ۷]$$

حال برای اشتراک دامنه و برد g داریم:

$$D_g \cap R_g = (-۱, ۶) - \{۳\}$$

این بازه شامل اعداد صحیح صفر، ۱، ۲، ۴ و ۵ است.

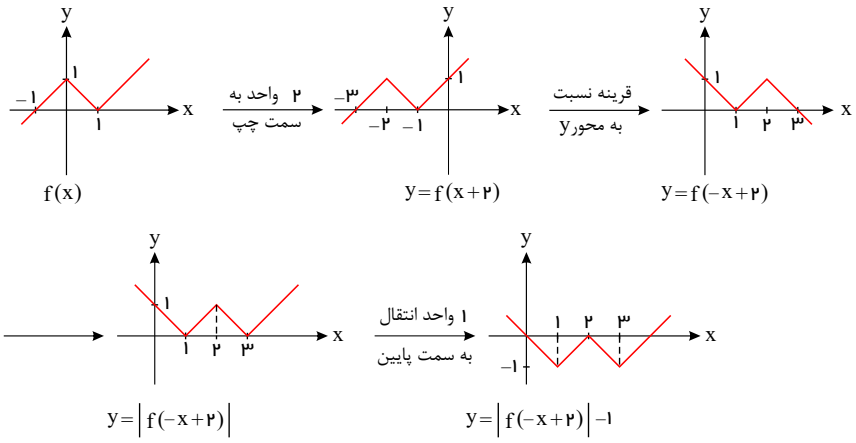
۳۹ - گزینه ۴ ابتدا ضابطه‌های دو تابع f و g را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \left(x + \frac{۱}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۴}$$

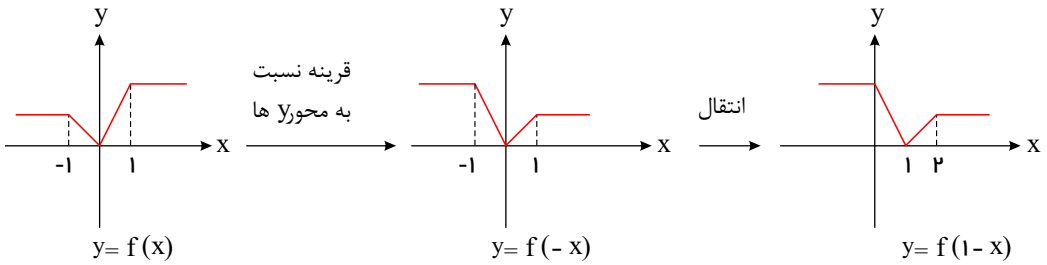
$$g(x) = (x+۱)^۲ - ۱ = \left(x + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\right)^۲ - \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴} = f(x + \frac{۱}{۲}) - \frac{۳}{۴}$$

پس برای رسم تابع g، با توجه به قوانین انتقال کافی است نمودار تابع f را $\frac{۱}{۲}$ واحد چپ و $\frac{۳}{۴}$ واحد به پایین منتقل کنیم.

۴۰ - گزینه ۲ ابتدا نمودار $y = f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا به نمودار $y = f(-x+۲)$ برسیم سپس آن قسمت از نمودار تابع که در زیر محور xها قرار دارد قرینه می‌کنیم تا به تابع $y = |f(-x+۲)|$ برسیم در انتها نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا تابع $y = |f(-x+۲)| - ۱$ ایجاد شود.



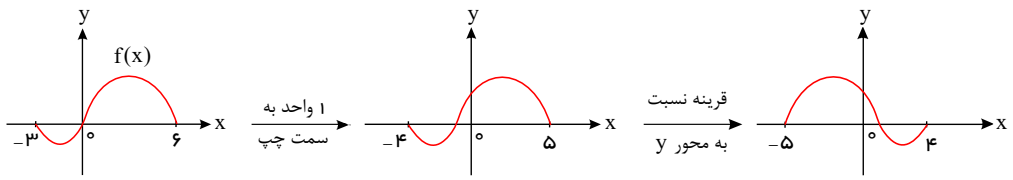
۴۱ - گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را با انتقال نمودار $y = f(x-۱)$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ رسم می‌کنیم. پس نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کرده و نمودار حاصل را به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست رسم می‌کنیم.

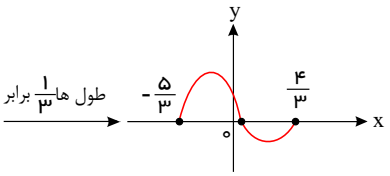


۴۲ - گزینه ۳

$$y = f(-۳x+۱)$$

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا به منحنی $y = f(x+۱)$ برسیم و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا به منحنی $y = f(-x+۱)$ برسیم و بعد در استای محور xها به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ منقبض می‌کنیم و به نمودار تابع $y = f(-۳x+۱)$ می‌رسیم.





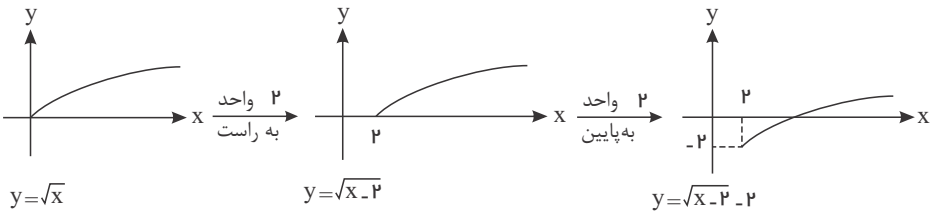
۴۳ - گزینه ۳ تابع g یک تابع خطی است. با توجه به نمودار تابع g، ضابطهٔ آن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. \\ B\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.\end{cases} \rightarrow \frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \rightarrow \frac{y}{x-3}=\frac{-3}{3}=-1 \rightarrow g=-x+3 \rightarrow g(x)=-x+3$$

با جای‌گذاری ضابطهٔ g در f، ضابطهٔ f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{1-g(x)}-2 \xrightarrow{g(x)=-x+3} f(x)=\sqrt{1-(-x+3)}-2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-2}-2$$

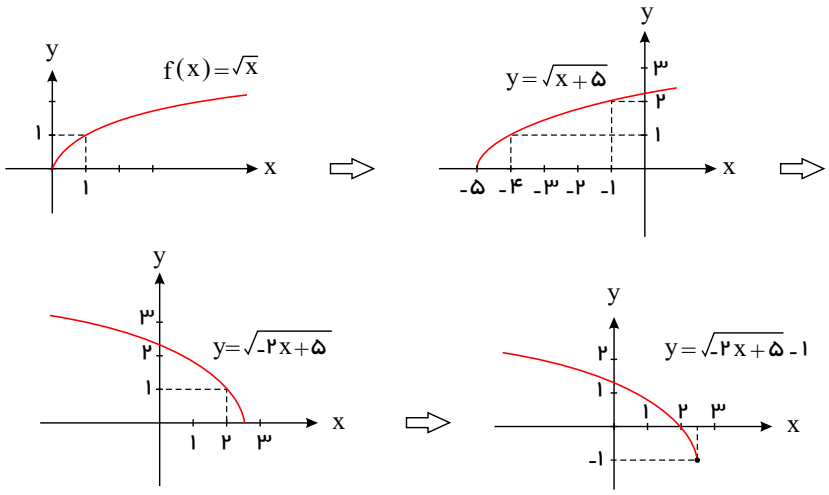
برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-2}-2$، کافیست نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ابتدا ۲ واحد به راست ببریم و سپس آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم تا به نمودار $y=\sqrt{x-2}-2$ برسیم.



۴۴ - گزینه ۱

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{x\to x+5} y=\sqrt{x+5} \xrightarrow{x\to -2x} y=\sqrt{-2x+5} \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{یک واحد}} y=\sqrt{-2x+5}-1$$

نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را ابتدا ۵ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا $y=\sqrt{x+5}$ حاصل شود. در نمودار حاصل، طول نقاط را بر -2 تقسیم می‌کنیم تا $y=\sqrt{-2x+5}$ به‌دست آید. سپس در نهایت نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



۴۵ - گزینه ۲ باید مشخص کنیم با چه انتقال‌هایی تابع $y=f(x)$ به $y=-2f(\frac{x}{2}-\frac{3}{2})+y_0$ تبدیل می‌شود.

$$y=f(x) \xrightarrow[x\to x-\frac{3}{2}]{\text{به سمت راست } \frac{3}{2}} y_1=f(x-\frac{3}{2}) \xrightarrow[x\to\frac{1}{2}x]{\text{طول‌ها دو برابر}} y_2=f(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}) \xrightarrow{\text{عرض‌ها } -2 \text{ برابر}} y_3=-2f(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}) \xrightarrow[\text{یا پایین}]{\text{به سمت بالا } y_0} y=-2f(\frac{x}{2}-\frac{3}{2})+y_0$$

پس: $\left|\begin{matrix}2x_0\\y_0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{به سمت راست } \frac{3}{2}} \left|\begin{matrix}2x_0+\frac{3}{2}\\y_0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طول‌ها دو برابر}} \left|\begin{matrix}4x_0+3\\y_0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{عرض‌ها } -2 \text{ برابر}} \left|\begin{matrix}4x_0+3\\-2y_0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{عرض با } y_0 \text{ جمع شود}} \left|\begin{matrix}4x_0+3\\-y_0\end{matrix}\right.$

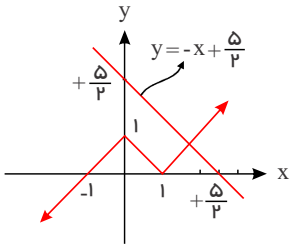
۴۶ - گزینه ۱ با توجه به این که برای رسم $f(x+3)$ نمودار $f(x)$ را در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم، پس برد این دو تابع یکسان است، حال داریم:

$$f(x+3)=2-x \quad , \quad \text{دامنه}=[-1,2) \Rightarrow -1\le x<2 \Rightarrow -2<-x\le 1 \overset{+2}{\Rightarrow} 0<2-x\le 3$$
$$\Rightarrow 0<f(x+3)\le 3 \Rightarrow R_{f(x+3)}=(0,3] \Rightarrow R_{f(x)}=R_{f(x+3)}=(0,3]$$

۴۷ - گزینه ۲ باید ریشه‌های مخرج تابع g را بیابیم، که داریم:

$$۲f(x+a)+۲x-۵=۰ \Rightarrow f(x+a)=-x+\frac{۵}{۲}$$

چون دامنهٔ g به‌صورت $\mathbb{R}-[m,n]$ می‌باشد، پس جواب معادلهٔ بالا باید به‌صورت بازهٔ $[m,n]$ باشد و زمانی این اتفاق می‌افتد که قسمتی از نمودار $f(x+a)$ بر خط $y=-x+\frac{۵}{۲}$ منطبق شود و مطابق شکل زیر برای این کار باید نمودار f را به‌اندازهٔ $\frac{۳}{۲}$ واحد به راست منتقل کنیم که داریم:



$$y=f(x)\xrightarrow[x\to x-\frac{۳}{۲}]{\frac{۳}{۲}\text{واحد به راست}} f(x-\frac{۳}{۲}) \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

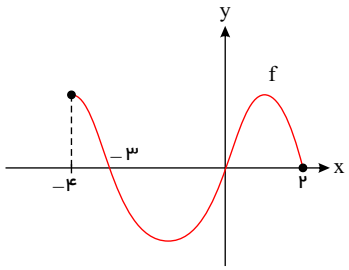
۴۸ - گزینه ۳

$$A(۳,۲)\in f \Rightarrow f(۳)=۲$$

$$y=۳f(-۲x+۱) \Rightarrow -۲x+۱=۳ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow y=۳f(۳)=۳\times ۲=۶ \Rightarrow A'(-۱,۶)$$

۴۹ - گزینه ۱

نمودار $y=f(x)$، با انتقال نمودار $y=f(x-۲)$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ به‌دست می‌آید.



حال با جدول تعیین علامت زیر داریم:

	-۴		-۳		۰		۲
x		$-$		$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$g(x)=xf(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	

$$D_g: xf(x)\geq ۰ \Rightarrow D_g=[-۳,۲]$$

۵۰ - گزینه ۳ با توجه به شکل، a مثبت است و داریم:

$$f(x)=\sqrt{x+۱}\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-\sqrt{x+۱}\xrightarrow[x\to x+a]{a \text{ واحد به چپ}} y=-\sqrt{x+a+۱}\xrightarrow{۲a \text{ واحد به بالا}} g(x)=-\sqrt{x+a+۱}+۲a$$

نمودار نهایی را $g(x)$ درنظر گرفته‌ایم. با توجه به نمودار، $g(x)$ از نقطهٔ $(۲,۰)$ عبور می‌کند، پس داریم:

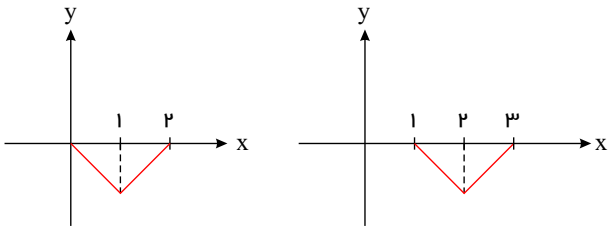
$$g(۲)=۰ \Rightarrow -\sqrt{۲+a+۱}+۲a=۰ \Rightarrow \sqrt{a+۳}=۲a \Rightarrow a+۳=۴a^۲$$

$$\Rightarrow ۴a^۲-a-۳=۰ \Rightarrow (a-۱)(۴a+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۳}{۴} & \text{غیرقابل‌قبول} \\ a=۱ & \text{جواب} \end{cases}$$

$$g(x)=-\sqrt{x+۲}+۲ \xrightarrow{x=۰} b=g(۰)=-\sqrt{۰+۲}+۲=۲-\sqrt{۲}$$

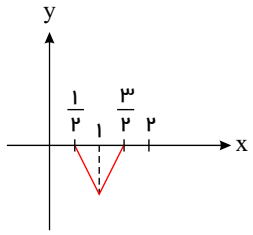
۵۱ - گزینه ۱

$$y=f(۱-x)\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}]{x\to -x} y=f(۱+x)\xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{x\to x-۱} y=f(x)$$



f (۱+x) f (x)

حال برای رسم $y=f(۲x)$، در تابع $y=f(x)$ طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.



f (۲x)

۵۲ - گزینه ۳ برای رسم نمودار تابع $y=-f(-x+۱)$ باید مراحل زیر را انجام داد:

ابتدا نمودار ۱ واحد به سمت چپ انتقال داده شود، تا به تابع $y=f(x+۱)$ برسیم و نمودار نسبت به محور yها قرینه شودتا به نمودار $y=f(-x+۱)$ برسیم.

سپس برای اینکه نمودار $y=-f(-x+۱)$ را رسم کنید باید نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنید. که در نهایت به گزینهٔ «۳» می‌رسیم.

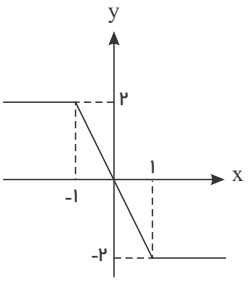
۵۳ - گزینه ۳ در حالت کلی برای اینکه تابع $f(x)$ را به اندازهٔ a واحد به سمت راست انتقال دهیم باید در معادلهٔ تابع به جای x، $x-a$ قرار دهیم و اگر بخواهیم به اندازهٔ k واحد به پائین انتقال دهیم باید به جای y، $y+۴$ قرار دهیم، یا به عبارتی k واحد از سمت راست تابع y کم کنیم.

نمودار $y=۲|x+۱|+۳$ را به کمک انتقال $x\to x-۲$ دو واحد به راست حرکت می‌دهیم. یعنی $y=۲|x-۱|+۳$. سپس ۴ واحد از آن کم می‌کنیم: $y=۲|x-۱|-۱$.

$$۲|x+۱|+۳=۲|x-۱|-۱\Rightarrow |x-۱|-|x+۱|=۲$$

با رسم نمودار نقاط تلاقی خط افقی $y=۲$ و نمودار تابع $y=|x-۱|-|x+۱|$ مشخص است.

که با توجه به نمودار داریم:



y=|x-۱|-|x+۱|

در این فاصله تقاطع دارند. $\to x\in(-\infty,-۱]$

۵۴ - گزینه ۳ نقطهٔ $(-۴,۰)$ در تابع $f(x)$ به نقطهٔ $\left(-\frac{۵}{۲},۲\right)$ در تابع $g(x)$ تبدیل شده است، پس داریم:

$$g(x)=m-f(nx+۱)$$

$$(-۴,۰)\in f\Rightarrow f(-۴)=۰\Rightarrow\left(-\frac{۵}{۲},۲\right)\in g\Rightarrow g\left(-\frac{۵}{۲}\right)=۲$$

$$g\left(-\frac{۵}{۲}\right)=m-f\left(-\frac{۵}{۲}n+۱\right)=۲\Rightarrow -\frac{۵}{۲}n+۱=-۴\Rightarrow -\frac{۵}{۲}n=-۵\Rightarrow n=۲$$

$$m-f(-۴)=۲\Rightarrow m-۰=۲\Rightarrow m=۲\Rightarrow ۲m+n=۲\times۲+۲=۶$$

۵۵ - گزینه ۳

$y_1 = f(x) \Rightarrow 1 \le x < 4$

$f(x^2) \Rightarrow 1 \le x^2 < 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 \ge 1 \Rightarrow x \le -1 \text{ یا } x \ge 1 \\ x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} \boxed{-2 < x \le -1 \text{ یا } 1 \le x < 2} \quad (1)$

$y_2 = g(x) \Rightarrow 2 < x < 9$

$g(3-2x) \Rightarrow 2 < 3 - 2x < 9 \Rightarrow -1 < -2x < 6 \Rightarrow \boxed{-3 < x < \frac{1}{2}} \quad (2)$

$D_h = (1) \cap (2) = (-2, -1]$

۵۶ - گزینه ۱ کافی است نقطهٔ $(3, -4)$ را دو واحد در راستای افقی به سمت چپ انتقال دهیم تا رأس سهمی $y = x^2 + ax + b$ به‌دست آید؛ بنابراین نقطهٔ $(1, -4)$ رأس اولیهٔ سهمی بوده است. حال چون طول رأس سهمی، میانگین صفرهای آن است. مجموع جواب‌های معادلهٔ $y = 0$ به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$y = x^2 + ax + b \Rightarrow$ رأس $x = 1$

$y = 0 \Rightarrow x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow$ ریشه‌ها باشند $x_2, x_1 \Rightarrow$ رأس $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$\Rightarrow 1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$

۵۷ - گزینه ۴

$$y = x^2 - 1 \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{انتقال یک واحد}} y = (x+1)^2 - 1 \xrightarrow[\text{ضریب } \frac{1}{2}]{\text{انقباض با}} y = (2x+1)^2 - 1 \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = (-2x+1)^2 - 1 = (2x-1)^2 - 1 = 4x^2 - 4x$$

حال تابع به‌دست آمده را با خط $y = x$ تلاقی می‌دهیم. داریم:

$$4x^2 - 4x = x \Rightarrow 4x^2 - 5x = x(4x-5) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{array} \right.$$

۵۸ - گزینه ۲ ابتدا دامنه و برد تابع $y = f(x)$ را حساب می‌کنیم:

$-2 < x \le 3 \Rightarrow -3 < x - 1 \le 2 \Rightarrow D_f = (-3, 2]$

$-1 \le 2f(x-1) < 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le f(x-1) < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le f(x) < 1 \Rightarrow R_f = [-\frac{1}{2}, 1)$

حال دامنه و برد تابع $y = -f(\frac{x}{2}) + 4$ را حساب می‌کنیم.

$-3 < \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow -6 < x \le 4 \Rightarrow$ دامنه : $D = (-6, 4]$

$-\frac{1}{2} \le f(x) < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le f(\frac{x}{2}) < 1 \Rightarrow -1 < -f(\frac{x}{2}) \le \frac{1}{2} \Rightarrow 3 < -f(\frac{x}{2}) + 4 \le \frac{9}{2} \Rightarrow$ برد : $R = (3, \frac{9}{2}]$

$\Rightarrow R \cap D = (3, 4/5] \cap (-6, 4] = (3, 4]$

۵۹ - گزینه ۱ ابتدا مراحل تبدیل نمودار $y = f(x)$ را به $y = 2f(2+3x) - 1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال ۲ واحد}} f(2+x) \xrightarrow[\text{با ضریب } \frac{1}{3}]{\text{انقباض افقی}} f(2+3x) \xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی}} 2f(2+3x) \xrightarrow[\text{به سمت پایین}]{\text{انتقال ۱ واحد}} y = 2f(2+3x) - 1$$

اگر مراحل فوق را از نمودار تابع $y = 2f(2+3x) - 1$ به‌صورت معکوس انجام دهیم، به نمودار تابع $y = f(x)$ خواهیم رسید. بنابراین ترتیب مراحل گفته‌شده در گزینهٔ «۱» درست است.

۶۰ - گزینه ۲

$$y = f(x) \xrightarrow{x \to x-1} f(x-1) \xrightarrow{\text{۲ واحد پایینی}} f(x-1) - 2$$

باتوجه به تبدیل‌های بالا داریم:

$$y = \begin{cases} |2(x-1) - 3| - 2 & ; x - 1 \ge 1 \\ (x-1)^2 - (x-1) - 2 & ; x - 1 < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} |2x - 5| - 2 & ; x \ge 2 \\ x^2 - 3x & ; x < 2 \end{cases}$$

محل تلاقی نمودار این تابع را با محور xها به‌دست می‌آوریم.

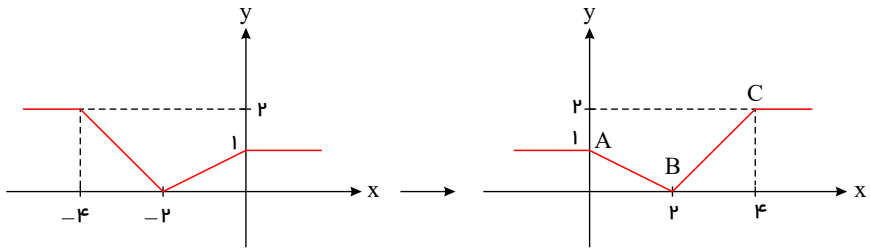
$$\Rightarrow \begin{cases} |2x - 5| - 2 = 0 \Rightarrow 2x - 5 = \pm 2 \xrightarrow{x \ge 2} x = 3/5 \\ x^2 - 3x = 0 \xrightarrow{x < 2} x = 0 \end{cases}$$

در نتیجه فاصلهٔ نقاط برخورد نمودار جدید با محور x ها ۳٫۵ خواهد بود.

۶۱ - گزینه ۱

$$f(x) \xrightarrow{x \to \frac{x}{۲}} f(\frac{x}{۲}) \xrightarrow{x \to -x} f(-\frac{x}{۲})$$

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را دوبرابر کرده و سپس آن را نسبت به محور yها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f(-\frac{x}{۲})$ حاصل می‌شود.



$y = f(\frac{x}{۲})$ $\qquad$ $y = f(-\frac{x}{۲})$

$$\begin{cases} AB = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵} \\ BC = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow AB + BC = ۲\sqrt{۲} + \sqrt{۵}$$

۶۲ - گزینه ۴ ابتدا دامنهٔ توابع $y_۱ = f(x+۲)$ و $y_۲ = f(۲x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-۴ \le x + ۲ \le ۱ \Rightarrow -۶ \le x \le -۱ \Rightarrow D_{y_۱} = [-۶, -۱]$$

$$-۴ \le ۲x \le ۱ \Rightarrow -۲ \le x \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_{y_۲} = [-۲, \frac{۱}{۲}]$$

دامنهٔ تابع g اشتراک دامنهٔ توابع بالاست. پس $D_g = [-۲, -۱]$ خواهد بود.

۶۳ - گزینه ۱ برد تابع $y = f(ax+b)$ با برد تابع $y = f(x)$ یکسان است، پس داریم:

$$y = \frac{۱}{۲}f(x-۲) \to \text{برد} = [-۱, ۲] \Rightarrow -۱ \le \frac{۱}{۲}f(x-۲) \le ۲ \Rightarrow -۲ \le f(x-۲) \le ۴ \Rightarrow -۲ \le f(x) \le ۴$$

$$\Rightarrow -۲ \le f(۱-۲x) \le ۴ \Rightarrow ۲ \ge -f(۱-۲x) \ge -۴ \Rightarrow -۴ \le -f(۱-۲x) \le ۲$$

بنابراین برد تابع $y = -f(۱-۲x)$ بازهٔ $[-۴, ۲]$ است.

$$y = \frac{۱}{۲}f(x-۲) \Rightarrow \text{دامنه} = [-۲, ۳] \Rightarrow -۲ \le x \le ۳ \Rightarrow -۲ - ۲ \le x - ۲ \le ۳ - ۲$$

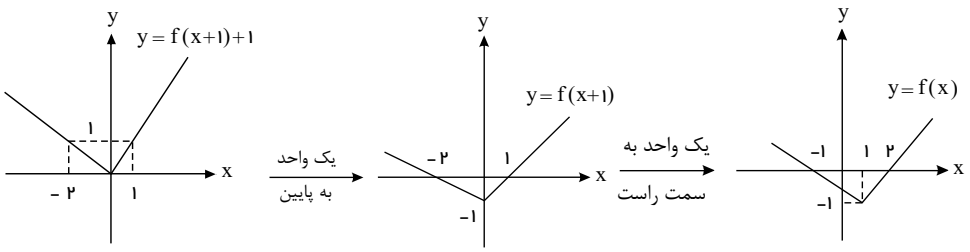
$$\Rightarrow -۴ \le x - ۲ \le ۱ \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow \text{دامنه} = [-۴, ۱]$$

$$y = -f(۱-۲x) \Rightarrow -۴ \le ۱ - ۲x \le ۱ \Rightarrow -۵ \le -۲x \le ۰ \Rightarrow \frac{۵}{۲} \ge x \ge ۰ \Rightarrow ۰ \le x \le \frac{۵}{۲}$$

پس دامنه $y = -f(۱-۲x)$ بازهٔ $[۰, \frac{۵}{۲}]$ است. حال داریم:

$$[-۴, ۲] \cap [۰, \frac{۵}{۲}] = [۰, ۲]$$

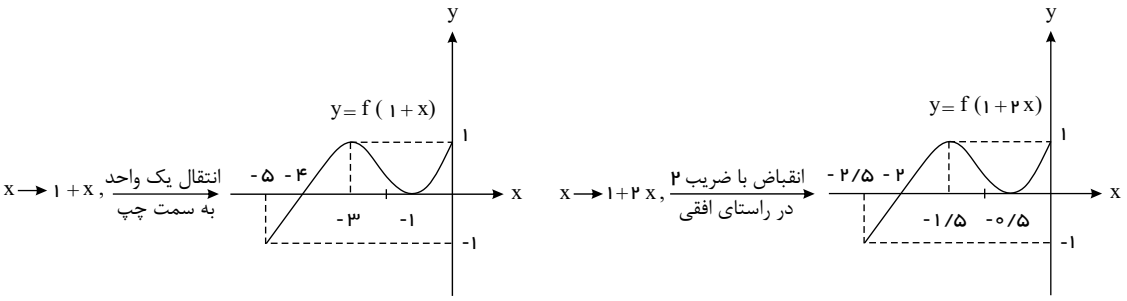
۶۴ - گزینه ۳ شکل‌های زیر را در نظر بگیرید؛ داریم:

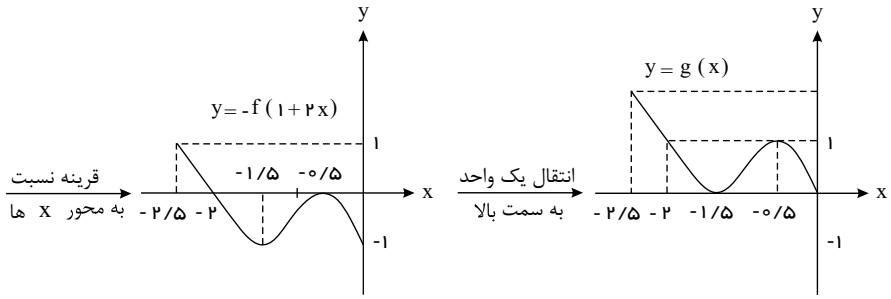


جموع صفرهای تابع f برابر $-۱ + ۲ = ۱$ است.

۶۵ - گزینه ۱

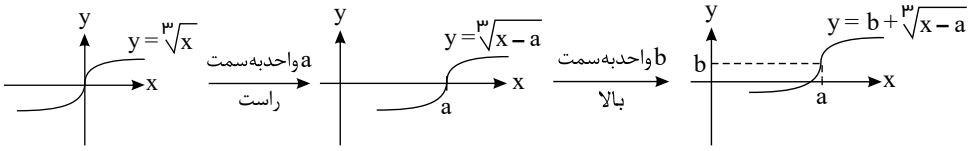
با انجام هر کدام از مراحل داریم:





۶۶ - گزینه ۱

برای رسم نمودار تابع $f(x) = b - \sqrt[۳]{a-x} = b + \sqrt[۳]{x-a}$ ، از نمودار $y = \sqrt[۳]{x}$ استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل داده شده مقدار a مثبت است. پس داریم:



بنابراین در تابع $f(x) = b + \sqrt[۳]{x-a}$، $b = ۱$ می‌باشد، از طرفی $f(۷) = ۱$ است.

$$f(x) = ۱ + \sqrt[۳]{x-a} \xrightarrow{f(۷)=۱}$$

$$۱ + \sqrt[۳]{۷-a} = ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{۷-a} = ۰ \Rightarrow a = ۷$$
$$\Rightarrow f(x) = ۱ + \sqrt[۳]{x-۷}$$

$$\Rightarrow f(-۱) = ۱ + \sqrt[۳]{-۸} = ۱ - ۲ = -۱$$

۶۷ - گزینه ۳ اگر تبدیل یافتهٔ $(۱, ۰)$ را روی نمودار g، $(x_۰, y_۰)$ در نظر بگیریم، داریم:

$$۲x_۰ = ۱ \Rightarrow x_۰ = \frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

پس:

$$g(x_۰) = ۱ + f(۲x_۰) \overset{(۱)}{=\!=} ۱ + f(۱) = ۱ + ۰ = ۱ \quad (۲)$$

بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow (x_۰, y_۰) = (\frac{۱}{۲}, ۱)$$

۶۸ - گزینه ۳ روش اول:

ابتدا نمودار f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = f(x+۱)$ رسم شود. سپس نمودار را در راستای افقی منقبض می‌کنیم. به‌طوری که طول نقاط نصف شود تا نمودار $y = f(۲x+۱)$ به‌دست آید. سپس نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(-۲x+۱)$ رسم شود. در انتها نیز نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار g به‌دست آید.

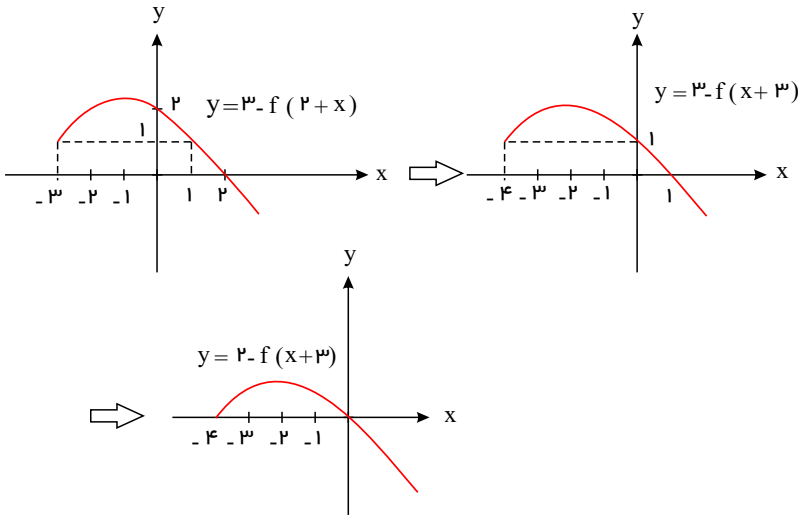
روش دوم: نقطه‌یابی

نقطهٔ $(۰, -۲)$ روی نمودار تابع f ، به نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۲)$ روی نمودار تابع g و نقطهٔ $(۰, ۱)$ نیز به نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, -۱)$ تبدیل می‌شود. بنابراین فقط نمودار تابع گزینهٔ «۳» است که این شرایط را دارد. دقت کنید که نقطهٔ $(۰, ۱)$ نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, -۱)$ باید توخالی باشند.

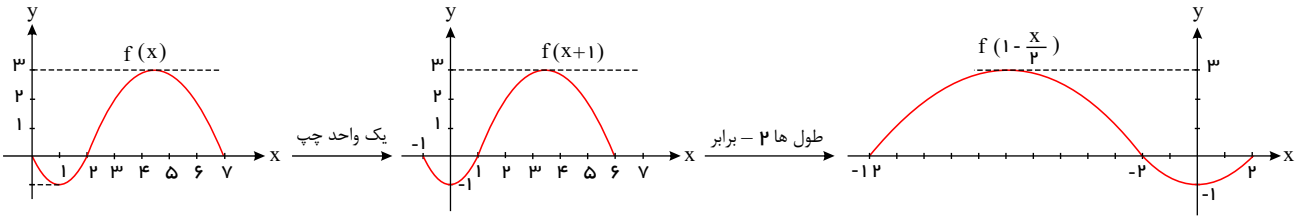
۶۹ - گزینه ۲

$$y=۳-f(۲-x)\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } y\text{ها}]{x\to -x} y=۳-f(۲+x)\xrightarrow[\text{۱ واحد انتقال به چپ}]{x\to x+۱} y=۳-f(۲+x+۱)$$

$$\Rightarrow y=۳-f(x+۳)\xrightarrow[\text{یک واحد انتقال به پایین}]{} y=۲-f(x+۳)$$



۷۰ - گزینه ۱ نمودار $f(x+۲)$ را دو واحد به راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.



برای تعیین دامنهٔ $\sqrt{xf(۱-\frac{x}{۲})}$ باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$xf(۱-\frac{x}{۲})\geq ۰$$

x	-۱۲		-۲		۰		۲
x		$-$		$-$	۰	$+$	
$f(۱-\frac{x}{۲})$	۰	$+$	۰	$-$		$-$	۰
$xf(۱-\frac{x}{۲})$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰

$\longrightarrow D_f=[-۲,۰]\cup\{-۱۲,۲\}$

۷۱ - گزینه ۳ با توجه به صورت سوال دستور همهٔ گزینه‌ها را اجرا می‌کنیم.

گزینهٔ «۱» :
$$\begin{cases} x\to -x\Rightarrow \sqrt{x}\to\sqrt{-x} \\ x\to x-۱\Rightarrow \sqrt{-x}\to\sqrt{-(x-۱)}=\sqrt{-x+۱} \\ x\to \frac{۱}{۳}x\Rightarrow \sqrt{-x+۱}\Rightarrow\sqrt{-\frac{۱}{۳}x+۱} \end{cases}$$

گزینهٔ «۲» :
$$\begin{cases} x\to x+۱\Rightarrow \sqrt{x}\to\sqrt{x+۱} \\ x\to -x\Rightarrow \sqrt{x+۱}\to\sqrt{-x+۱} \\ x\to \frac{۱}{۳}x\Rightarrow \sqrt{-x+۱}\to\sqrt{-\frac{۱}{۳}x+۱} \end{cases}$$

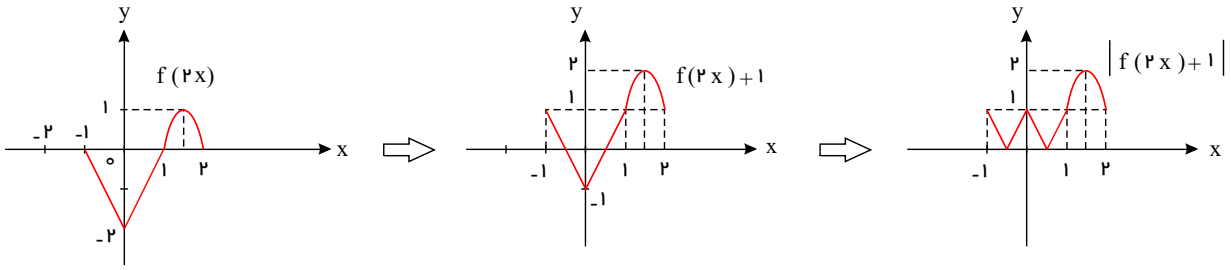
گزینهٔ «۳» :
$$\begin{cases} x\to -x\Rightarrow \sqrt{x}\to\sqrt{-x} \\ x\to \frac{۱}{۳}x\Rightarrow \sqrt{-x}\to\sqrt{-\frac{۱}{۳}x} \\ x\to x+۱\Rightarrow \sqrt{-\frac{۱}{۳}x}\to\sqrt{-\frac{۱}{۳}(x+۱)}=\sqrt{-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}} \end{cases}$$

گزینهٔ «۴» :
$$\begin{cases} x \to -x \Rightarrow \sqrt{x} \to \sqrt{-x} \\ x \to \frac{۱}{۳}x \Rightarrow \sqrt{-x} \to \sqrt{-\frac{۱}{۳}x} \\ x \to x-۳ \Rightarrow \sqrt{-\frac{۱}{۳}x} \to \sqrt{-\frac{۱}{۳}(x-۳)} = \sqrt{-\frac{۱}{۳}x+۱} \end{cases}$$

۷۲ - گزینه ۳

$$|f(۲x)+۱| - m = ۰ \Rightarrow |f(۲x)+۱| = m$$

ابتدا نمودار $y = |f(۲x)+۱|$ را رسم می‌کنیم.



برای این که خط افقی $y = m$ نمودار $y = |f(۲x)+۱|$ را در ۴ نقطه قطع کند باید $۰ < m \leq ۱$ باشد.

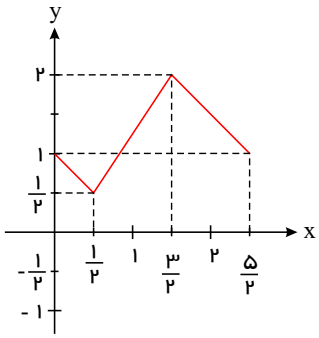
۷۳ - گزینه ۳ با توجه به مراحل زیر داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{۳ واحد به چپ}]{x \to x+۳} y_۱ = f(x+۳) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y\text{ها}]{x \to -x} y_۲ = f(-x+۳) \xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب ۲}]{x \to ۲x} y_۳ = f(-۲x+۳)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y_۴ = -f(-۲x+۳) \xrightarrow{\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{۱}{۲}} y_۵ = -\frac{۱}{۲}f(-۲x+۳)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y_۶ = -\frac{۱}{۲}f(-۲x+۳)+۱$$

با انجام مراحل بالا نمودار $y = -\frac{۱}{۲}f(-۲x+۳)+۱$ به صورت زیر است.



۷۴ - گزینه ۲

$$\begin{cases} y = f(x) \to \begin{cases} D_f = [۰,۴] \\ R_f = [-۲,۲] \end{cases} \\ y_۱ = \frac{۱}{۲}f(x+a)+۱ \to \begin{cases} D_{y_۱} = [-a, ۴-a] \\ R_{y_۱} = [\frac{۱}{۲}(-۲)+۱, \frac{۱}{۲}(۲)+۱] = [۰,۲] \end{cases} \end{cases}$$

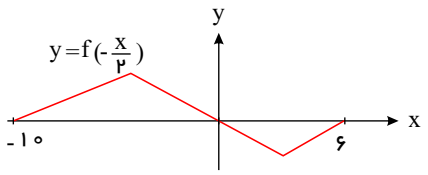
$$\begin{cases} y = g(x) \to \begin{cases} D_f = [-۴,۴] \\ R_f = [-۱,۱] \end{cases} \\ y_۲ = g(۲x)+b \to \begin{cases} D_{y_۲} = [-۲,۲] \\ R_{y_۲} = [-۱+b, ۱+b] \end{cases} \end{cases}$$

$D_{y_۱} = D_{y_۲} \to -a = -۲ \to a = ۲$ یا $۴-a = ۲ \to a = ۲$

$R_{y_۱} = R_{y_۲} \to ۰ = -۱+b \to b = ۱$ یا $۲ = ۱+b \to b = ۱$

س $a+b = ۳$ است.

۷۵ - گزینه ۳ برای رسم $y = f(-\frac{۱}{۲}x)$، باید در نمودار $y = f(x)$ طول نقاط را بر $-\frac{۱}{۲}$ تقسیم کنیم (در -۲ ضرب کنیم).



زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد:

$$g(x)=\sqrt{xf(-\frac{x}{۲})}\Rightarrow xf(-\frac{x}{۲})\geq ۰$$

x	-۱۰		۰		۶
x		$-$	۰	$+$	
$f(-\frac{x}{۲})$	۰	$+$	۰	$-$	۰
$xf(-\frac{x}{۲})$	۰	$-$	۰	$-$	۰

عبارت $xf(-\frac{x}{۲})$ در نقاط $x=-۱۰,۰,۶$ صفر و در مابقی نقاط منفی است، پس داریم:

$$D_g=\{-۱۰,۰,۶\}$$

۷۶ - گزینه ۱ فرض می‌کنیم x_i صفر تابع f، x'_i صفر تابع g و n تعداد صفرهای تابع f باشند، داریم:

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_n=۶\quad(*)$$

از طرفی بین صفرهای تابع f و صفرهای تابع g رابطهٔ زیر برقرار است:

$$۱-\frac{x'_i}{۲}=x_i$$

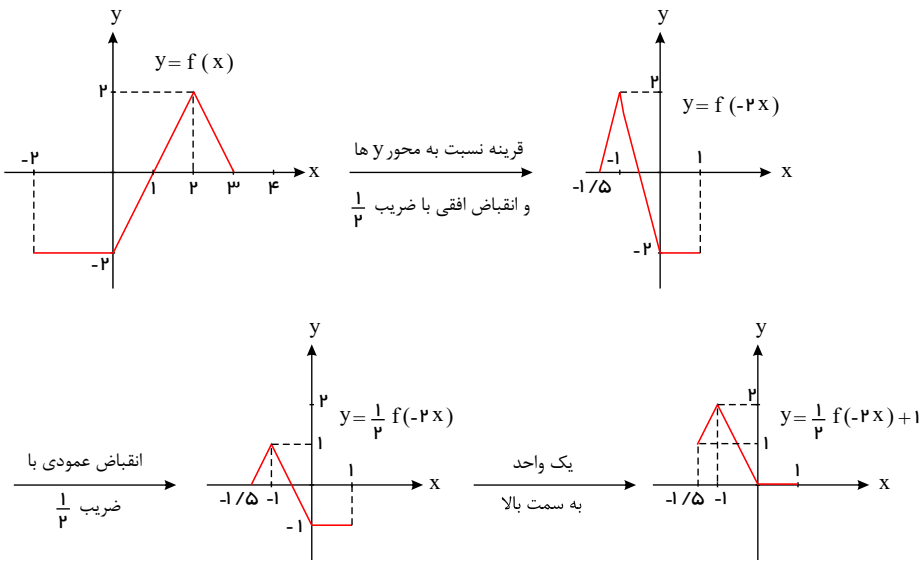
حال رابطهٔ $(*)$ به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$۱-\frac{x'_۱}{۲}+۱-\frac{x'_۲}{۲}+\cdots+۱-\frac{x'_n}{۲}=n-\frac{(x'_۱+x'_۲+\cdots+x'_n)}{۲}=۶$$

مجموع x'_i ها برابر -۴ است.

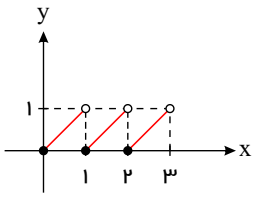
$$\Rightarrow n-\frac{-۴}{۲}=n+۲=۶\Rightarrow n=۴$$

۷۷ - گزینه ۲ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به دست می‌آید. سپس با انجام انتقال و انقباض، نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(-۲x)+۱$ را به دست می‌آوریم:

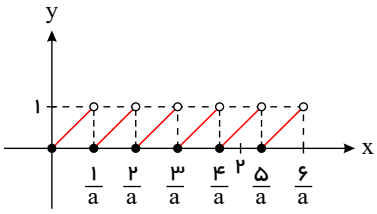


س دامنهٔ تابع $y=\frac{۱}{۲}f(-۲x)+۱$ برابر با $[-۱/۵,۱]$ و برد آن $[۰,۲]$ است که اشتراک آن‌ها بازهٔ $[۰,۱]$ می‌شود.

۷۸ - گزینه ۱ نمودار تابع $y=x-[x]$ به‌صورت زیر است:



بنابراین برای رسم نمودار تابع f کافی است طول نقاط روی نمودار تابع بالا را بر a تقسیم کنیم.



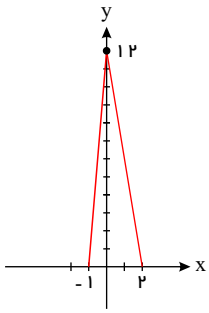
مطابق شکل فوق پنجمین نقطهٔ مشترک نمودار تابع f و محور xها نقطه‌ای به طول $\frac{۴}{a}$ است و ششمین نقطه، نقطه‌ای به طول $\frac{۵}{a}$ است. بنابراین:

$$\frac{۴}{a} \le ۲ < \frac{۵}{a} \xrightarrow{a>۰} ۴ \le ۲a < ۵ \Rightarrow ۲ \le a < \frac{۵}{۲}$$

۷۹ - گزینه ۳ اول مشخص می‌کنیم که چگونه $y = f(۲x+۵)$ به $y = ۳f(-۴x+۱)$ تبدیل شده است.

$$y = f(۲x+۵) \xrightarrow[x \to \frac{۱}{۲}x]{\text{طول‌ها دو برابر}} y_۱ = f(x+۵) \xrightarrow[x \to x-۴]{\text{۴ واحد راست}} y_۲ = f(x+۱) \xrightarrow{\text{طول‌ها } -\frac{۱}{۴} \text{ برابر}} y_۳ = f(-۴x+۱) \xrightarrow{\text{عرض‌ها ۳ برابر}} y = ۳f(-۴x+۱)$$

پس نمودار $y = ۳f(-۴x+۱)$ بدین صورت می‌شود:



$$\longrightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۳ = ۱۸$$

البته می‌توان نقاط متناظر $\left|\begin{smallmatrix}۰\\۰\end{smallmatrix}\right.$ و $\left|\begin{smallmatrix}-۲\\۴\end{smallmatrix}\right.$ و $\left|\begin{smallmatrix}-۶\\۰\end{smallmatrix}\right.$ از تابع $y = f(۲x+۵)$ را روی تابع $y = ۳f(-۴x+۱)$ بیابیم.

$$\left|\begin{smallmatrix}۰\\۰\end{smallmatrix}\right. \xrightarrow{y=f(۲x+۵)} f(۵) = ۰ \xrightarrow[x=-۱]{y=۳f(-۴x+۱)} y = ۳f(۵) = ۳(۰) = ۰ \to \left|\begin{smallmatrix}-۱\\۰\end{smallmatrix}\right.$$

$$\left|\begin{smallmatrix}-۲\\۴\end{smallmatrix}\right. \xrightarrow{y=f(۲x+۵)} f(۱) = ۴ \xrightarrow[x=۰]{y=۳f(-۴x+۱)} y = ۳f(۱) = ۳(۴) = ۱۲ \to \left|\begin{smallmatrix}۱۲\\۰\end{smallmatrix}\right.$$

$$\left|\begin{smallmatrix}-۶\\۰\end{smallmatrix}\right. \xrightarrow{y=f(۲x+۵)} f(-۷) = ۰ \xrightarrow[x=۲]{y=۳f(-۴x+۱)} y = ۳f(-۷) = ۳(۰) = ۰ \to \left|\begin{smallmatrix}۲\\۰\end{smallmatrix}\right.$$

۸۰ - گزینه ۲ نقاط $(۵,۰)$ و $(-۵,۰)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$، به‌ترتیب به نقاط $(-\frac{a-۵}{۲},۰)$ و $(-\frac{a+۵}{۲},۰)$ روی نمودار تابع $y = f(۲x+a)$ تبدیل می‌شوند. برای اینکه نمودار دو تابع حتماً برخورد داشته باشد، کافی است حداقل یکی از نقاط تبدیل شده در بازهٔ $[-۵,۵]$ قرار داشته باشد.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -۵ \le -\frac{a+۵}{۲} \le ۵ \Rightarrow -۵ \le \frac{a+۵}{۲} \le ۵ \\ \Rightarrow -۱۰ \le a+۵ \le ۱۰ \Rightarrow -۱۵ \le a \le ۵ \quad (۱) \\ -۵ \le -\frac{a-۵}{۲} \le ۵ \Rightarrow -۵ \le \frac{a-۵}{۲} \le ۵ \\ \Rightarrow -۱۰ \le a-۵ \le ۱۰ \Rightarrow -۵ \le a \le ۱۵ \quad (۲) \end{cases}$$

جتماع جواب‌های (۱) و (۲)، بازهٔ $[-۱۵,۱۵]$ است.

۸۱ - گزینه ۲

$$f(x+[x]) = x \ , \ x+[x] = t \Rightarrow [x+[x]] = [t] \Rightarrow [x]+[x] = [t]$$

$$\Rightarrow [x] = \frac{۱}{۲}[t] \ , \ x+[x] = t \Rightarrow x = t-[x] \Rightarrow x = t - \frac{۱}{۲}[t]$$

$$f(t)=t-\frac{۱}{۲}[t] \Rightarrow f(x)=x-\frac{۱}{۲}[x]$$

$$-۲\le x\le -۱ \Rightarrow f(x)=x-\frac{۱}{۲}(-۲)=x+۱$$

x	-۲	-۱
y	-۱	۰

$$-۱\le x\le ۰ \Rightarrow f(x)=x-\frac{۱}{۲}(-۱)=x+\frac{۱}{۲}$$

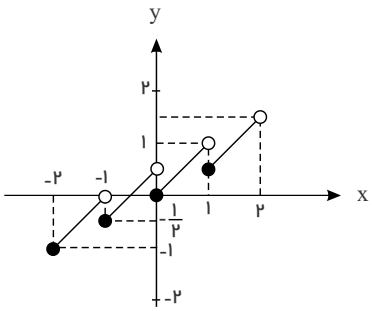
x	-۱	۰
y	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

$$۰\le x<۱ \Rightarrow f(x)=x-\frac{۱}{۲}\times ۰=x$$

x	۰	۱
y	۰	۱

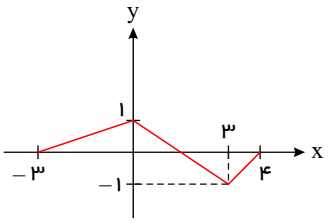
$$۱\le x<۲ \Rightarrow f(x)=x-\frac{۱}{۲}\times ۱=x-\frac{۱}{۲}$$

x	۱	۲
y	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$

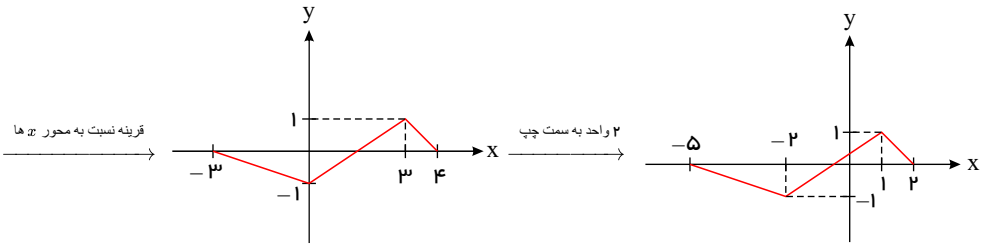


۸۲ - گزینه ۱

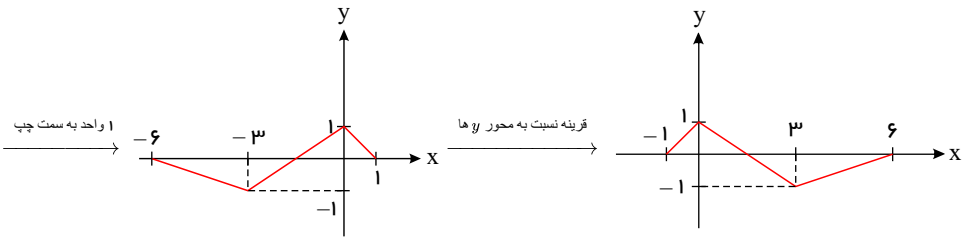
ابتدا نمودار $y=f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:



$y=-f(x-۲)$



$y=f(x-۲)$ $\qquad$ $y=f(x)$



$y=f(x+۱)$ $\qquad$ $y=f(-x+۱)$

۸۳ - گزینه ۴ برای یافتن g به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x)\xrightarrow{\text{۲واحد چپ}} f(x+۲)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور ها}} -f(x+۲)$$

$$\xrightarrow{\text{با ضریب } \frac{۱}{۲} \text{ منبسط شود}} -\frac{۱}{۲}f(x+۲)$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}} -\frac{۱}{۲}f(x+۲)-۳$$

نابراین:

$$g(x)=\frac{-۱}{۲}f(x+۲)-۳$$