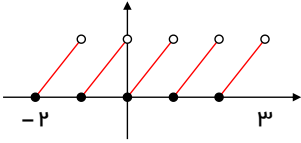


پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت زیر است، واضح است در فاصله $(-2, 3)$ ، ۵ پاره خط به اندازه $\sqrt{2}$ وجود دارد.



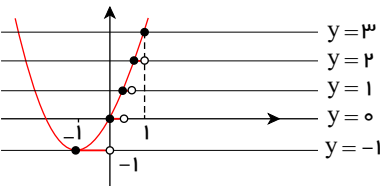
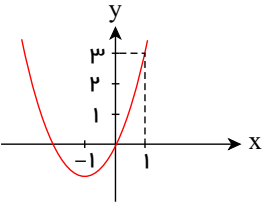
۲ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = f([x]) = f(-1) = 0 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = f([x]) = f(0) = 1 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = f([x]) = f(1) = 0 \end{aligned}$$

بنابراین نمودار گزینه ۱، صحیح است.

۳ - گزینه ۳

منحنی $y = x^2 + 2x$ را رسم می کنیم تابع $x^2 + 2x$ در بازه $[-1, 1]$ به صورت اکیداً صعودی است، در نتیجه تابع f صعودی است. $f(-1) = [-1] = -1$ ، $f(1) = [3] = 3$ لذا مقادیر $f(x)$ پاره خط هایی به عرضهای ۱، ۲، ۳ و نقطه ای به عرض ۳ می باشد و تعداد آن پاره خط ها ۴ می باشد.



راه حل دوم: نمودار $f(x) = [x^2 + 2x]$ در بازه $[-1, 1]$ را رسم می کنیم. توجه دارید که $f(-1) = -1$ و $f(1) = 3$ می باشد.

۴ - گزینه ۱ با در نظر گرفتن محدوده $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$ داریم:

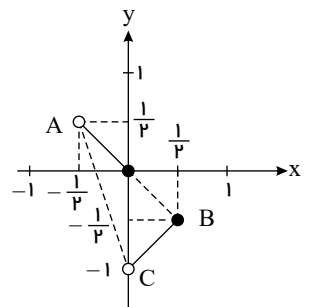
$$-1 < 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -2x < 1$$

$$-1 \leq -2x < 0 \Rightarrow [-2x] = -1, 0 < x \leq \frac{1}{2}, y = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$0 \leq -2x < 1 \Rightarrow [-2x] = 0, -\frac{1}{2} < x \leq 0, y = -x \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

نقاط A و B بر روی خط $y = -x$ و نقاط B و C بر روی خط $y = x - 1$ قرار دارند، پس مثلث ABC در رأس B قائمه است و داریم:

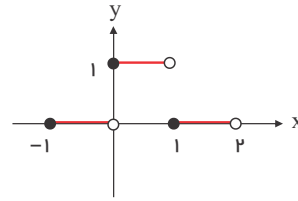
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \\ BC &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



۵ - گزینه ۱ باتوجه به شکل $D_f = [-1, 1]$ می باشد. پس $-1 \leq [x] \leq 1$ است و سه عدد صحیح در این فاصله قرار دارد. پس:

$$\begin{aligned} [x] &= -1 \xrightarrow{-1 \leq x < 0} f([x]) = f(-1) = 0 \\ [x] &= 0 \xrightarrow{0 \leq x < 1} f([x]) = f(0) = 1 \\ [x] &= 1 \xrightarrow{1 \leq x < 2} f([x]) = f(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f([x]) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



$$f(x) = x[x], \quad x \in [0, 2)$$

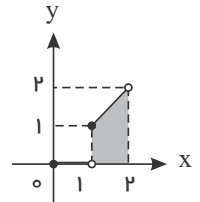
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = y = x$$

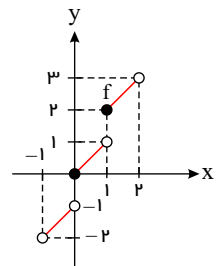
$$\Rightarrow y = f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$S = \text{مساحت دوزنقه} = \frac{\text{مجموع دو قاعده}}{2} \times \text{ارتفاع} = \frac{1+2}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

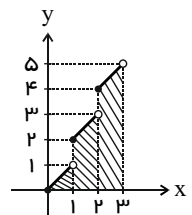
گزینه ۳ - ۶



گزینه ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است:

با توجه به نمودار تابع f، خط $y = \frac{5}{2}$ آن را قطع می‌کند.

گزینه ۴ نمودار تابع را در بازهٔ مربوطه رسم می‌کنیم:



مساحت مورد نظر مجموع مساحت‌های یک مثلث و دو دوزنقه هاشورخورده مطابق شکل فوق است. بنابراین:

$$S = \frac{|1 \times 1|}{2} + \frac{(2+3)(1)}{2} + \frac{(4+5)(1)}{2} = 7,5$$

گزینه ۳ - ۹

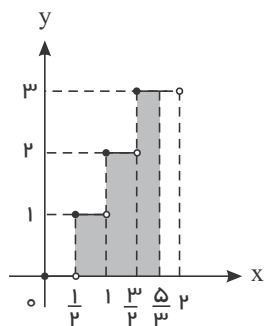
$$0 \leq x \leq \frac{5}{3} \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 2x \leq \frac{10}{3}$$

$$0 \leq 2x < 1 \Rightarrow y = [2x] = 0, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$1 \leq 2x < 2 \Rightarrow y = [2x] = 1, \quad \frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$2 \leq 2x \leq 3 \Rightarrow y = [2x] = 2, \quad 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

$$3 \leq 2x \leq \frac{10}{3} \Rightarrow y = [2x] = 3, \quad \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{3}$$

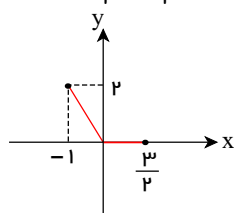


$$S = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$$

۱۰ - گزینه ۲

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = -1 \Rightarrow f(x) = 2x\left[\frac{x}{2}\right] = -2x$$

$$0 \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Rightarrow f(x) = 2x\left[\frac{x}{2}\right] = 0$$



ضابطه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} -2x, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$ و نمودار آن به صورت زیر است.