# پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ تابع درجه‌ی ۲ برای «رأس $x \geq (\frac{-b}{2a})$ یا $x \leq (\frac{-b}{2a})$» یک به یک است. چون در این حالت خطوط موازی محور $x$ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. لذا در این مسئله داریم:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-(a+1)}{2} \leq 3 \Rightarrow a+1 \geq -6 \Rightarrow a \geq -7$$

پس $a = -7$ کم‌ترین مقدار برای $a$ است.

۲ - گزینه ۳

می‌دانیم: در حالت کلی شرط یک به یک بودن تابع $y = f(x)$ آن است که بتوان از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ تساوی $x_1 = x_2$ را نتیجه گرفت. همچنین از روی نمودار، تابعی یک به یک است که هر خط موازی محور $x$ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

الف) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}}$

$$\xrightarrow{\text{هم علامت‌اند } x_1, x_2} \frac{x_1^2}{x_1^2+1} = \frac{x_2^2}{x_2^2+1}$$

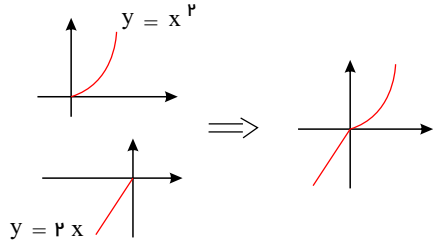
$$\Rightarrow x_1^2x_2^2 + x_1^2 = x_1^2x_2^2 + x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

چون $x_1$ و $x_2$ هم علامت‌اند، تابع یک به یک است.

ب) مثال نقض: $y = 5 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$. یک به یک نمی‌باشد.

ج) باتوجه به نمودار تابع یک به یک است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$




د) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x+1)^3 + 1$

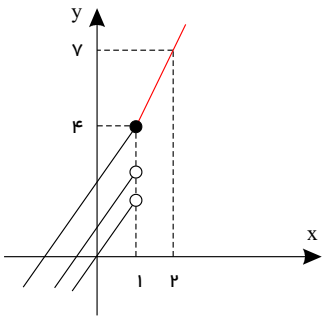
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1+1)^3 + 1 = (x_2+1)^3 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

تابع یک به یک است.

۳ - گزینه ۱ می‌دانیم: از روی نمودار، تابعی یک به یک است که هر خط موازی محور $x$ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

ابتدا $y = 3x + 1$ را به ازای $x \geq 1$ رسم می‌کنیم. باتوجه به شکل برای یک به یک بودن تابع، حداکثر مقدار $2x + a$ در نقطه‌ی $x = 1$ برابر ۴ می‌تواند باشد.

$$2x + a \leq 4 \xrightarrow{x=1} a \leq 2$$

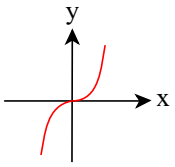



۴ - گزینه ۱

با رسم شکل به راحتی می توان دید که این تابع یک به یک و اکیداً صعودی است، زیرا:

اولاً: هیچ خط موازی محور $x$ ها نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نمی کند، پس تابع یک به یک است.

ثانیاً: به ازای هر $x_1 < x_2$، $f(x_1) < f(x_2)$ می باشد.




۵ - گزینه ۳ تابع به صورت زوج مرتب در صورتی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتبی مؤلف دوم یکسان نداشته باشد در غیر اینصورت باید مؤلفهٔ اول هم یکسان باشد.

$f^2$ را برای هر یک از گزینه‌ها به دست می‌آوریم:

«۱» گزینه‌ی : $f^2 = \{(0,0), (-2,1), (2,1)\}$

«۲» گزینه‌ی : $f^2 = \{(2,4), (3,9), (-5,4)\}$

گزینه‌ی «۳» : $f^{۲} = \{(-۱, ۱۶), (۱, ۴), (۴, ۱)\}$

گزینه‌ی «۴» : $f^{۲} = \{(۳, ۴), (-۳, ۴), (۰, ۰)\}$

ملاحظه می‌شود فقط $f^{۲}$ مربوط به گزینه‌ی ۳ شرایط یک به یک بودن را داراست.

۶ - گزینه ۲

$(۱, ۲), (۱, a^{۲} - ۲)$ تابع است. $f \Rightarrow a^{۲} - ۲ = ۲ \Rightarrow a^{۲} = ۴ \Rightarrow a = \pm ۲$

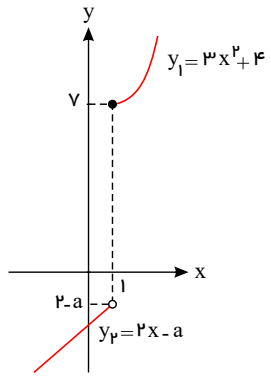
$(b + ۴, ۲), (۱, ۲)$ یک‌به‌یک است $f \Rightarrow b + ۴ = ۱ \Rightarrow b = -۳$

$$\begin{cases} a + b = -۲ - ۳ = -۵ \\ a + b = ۲ - ۳ = -۱ \end{cases}$$

۷ - گزینه ۴ شکلی معرف تابع یک‌به‌یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند و نه بیشتر.

با توجه به شکل فرضی زیر داریم:

$$f(x) = \begin{cases} ۳x^{۲} + ۴ & , x \geq ۱ \\ ۲x - a & , x < ۱ \end{cases}$$




برای یک‌به‌یک بودن تابع $f(x)$، داریم:

$$۲ - a \leq ۷ \Rightarrow a \geq -۵$$

با توجه به گزینه‌ها $a = -۴$ قابل قبول است.

۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $f(x)$ یک به یک است $x_۱ = x_۲ \Rightarrow f(x_۱) = f(x_۲)$ : اگر

با توجه به این‌که تابع $f$ یک به یک می‌باشد، داریم:

$$x + ۲f(x) = ۵x + ۲ \Rightarrow ۲f(x) = ۵x + ۲ - x \Rightarrow ۲f(x) = ۴x + ۲$$

$$\Rightarrow ۲f(x) = ۲(۲x + ۱) \Rightarrow f(x) = ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow fof(x) = f(f(x)) = ۲f(x) + ۱ = ۲(۲x + ۱) + ۱ = ۴x + ۳$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه تلاقی با محور } y} x = ۰ \Rightarrow fof(۰) = ۴(۰) + ۳ = ۳$$

۹ - گزینه ۲ می‌دانیم: برای این‌که تابع چند ضابطه‌ایی معرف یک تابع یک به یک باشد باید اشتراک بردهای ضابطه‌ها تهی باشد و در صورت داشتن برد مشترک، باید بردهای مشترک از دامنه‌های مشترک ایجاد شوند. در این تابع چون ضابطه‌ها دامنه‌ی مشترک ندارند پس نباید بردهای مشترک داشته باشند.

$$f_۱(x) = \sqrt{x + ۲} \xrightarrow{x \geq ۷} R_{f_۱} = [۳, +\infty)$$

$$f_۲(x) = \frac{x}{۳} + a \xrightarrow{x < ۶} R_{f_۲} = (-\infty, ۲ + a)$$

$$\xrightarrow{\text{برای یک به یک بودن}} (-\infty, ۲ + a) \cap [۳, +\infty) = \phi \Rightarrow ۲ + a \leq ۳ \Rightarrow a \leq ۱ \rightarrow \max(a) = ۱$$

۱۰ - گزینه ۲

$$f = \{(-۱, ۰), (۰, ۱), (۱, -۱), (۲, ۲)\}$$

تابع $f$ تابعی یک‌به‌یک است، پس از $f(u) = f(v)$ می‌توان نتیجه گرفت $u = v$، حال داریم:

$$f(۱ - f(x_۰)) = f(x_۰) \Rightarrow ۱ - f(x_۰) = x_۰ \Rightarrow f(x_۰) = ۱ - x_۰$$

فقط زوج مرتب $(۰, ۱)$ در رابطهٔ فوق صدق می‌کند.

$$x_۰ = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۱ - ۰ \Rightarrow f(۰) = ۱$$

۱۱ - گزینه ۱ $f$ تابعی یک به یک است یعنی:

$$\begin{cases} (۲, ۱) \in f \\ (m^{۲} - m, ۱) \in f \end{cases} \Rightarrow m^{۲} - m = ۲$$

$$\Rightarrow m^{۲} - m - ۲ = ۰ \Rightarrow (m - ۲)(m + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ \text{یا} \\ m = -۱ \end{cases}$$

$m = ۲$ قابل قبول نیست، چون $f$ یک به یک نمی‌شود:

$$f = \{(۲, ۱), (-۱, ۳), (۱, ۳)\}$$

ولی اگر $m = -۱$ باشد، داریم:

$f=\{(۲,۱),(-۱,۳),(-\frac{۱}{۲},۰)\}$

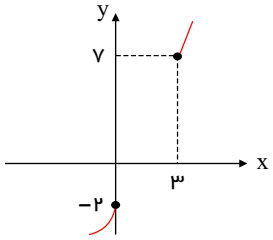
ما حاصل $(f+g)(-۱)$ را می‌خواهیم:

$(f+g)(-۱)=f(-۱)+g(-۱)=۳+[-\frac{۳}{۲}+۱]=۳+[-\frac{۱}{۲}]=۳-۱=۲$

۱۲ - گزینه ۳

ابتدا نمودارهای $(x\geq ۳)y=|۲x+۱|=۲x+۱$ و $y=-\sqrt{-x}-۲$ را رسم می‌کنیم. سپس نمودار $g(x)=-x+h$ را طوری باید در نظر بگیریم که هر خط افقی $y=k$ نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

باتوجه به این که $f(۳)=۷$ است بنابراین برای این که بیش‌ترین مقدار $h$ به دست آید، باید $y=-x$ را ۷ واحد به بالا انتقال دهیم، بنابراین $h_{\max}=۷$.




۱۳ - گزینه ۴ توجه: برای این‌که یک زوج مرتب معرف یک تابع یک به یک باشد ابتدا باید تابع باشد یعنی مؤلفه‌ی اول یکسان نداشته باشد و در صورت وجود مؤلفه‌ی اول باید مؤلفه‌ی دوم هم برابر باشد و سپس باید یک به یک باشد یعنی مؤلفه‌ی دوم یکسان نداشته باشد و در صورت وجود مؤلفه‌ی دوم برابر، باید مؤلفه‌ی اول هم برابر باشد. بنابراین ابتدا شرط تابع بودن را بررسی می‌کنیم:

تابع $f\Rightarrow ۴m=۴\Rightarrow m=۱\rightarrow f=\{(-۱,۴),(۲,۳),(۲,n-۱),(۵,۶),(p,n+۲)\}$

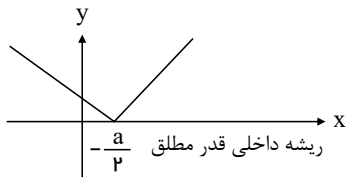
برای تابع بودن باید مؤلفه‌ی اول یکسان نداشته باشد.

تابع $f\Rightarrow n-۱=۳\Rightarrow n=۴\Rightarrow f=\{(-۱,۴),(۲,۳),(۵,۶),(p,۶)\}$

برای یک به یک بودن:

یک به یک $f\Rightarrow p=۵\Rightarrow m+n+p=۱۰$

۱۴ - گزینه ۳ می‌دانیم که در نمودار تابع $f(x)=|mx+n|$ نقطه‌ی شکستگی نمودار تابع، ریشه‌ی داخل قدر مطلق است، پس:




حال برای این که $f$ تابعی یک به یک باشد، باید ریشه‌ی داخل قدر مطلق در فاصله‌ی $(-۱,۲)$ نباشد. پس ابتدا حدود $a$ را طوری می‌یابیم که ریشه در فاصله‌ی $(-۱,۲)$ باشد. سپس مجموعه‌ی جواب به دست آمده را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم:

$۲x+a=۰\Rightarrow x=-\frac{a}{۲}$

$\Rightarrow -۱<-\frac{a}{۲}<۲\xrightarrow{\times(-۲)}-۴<a<۲$

پس مجموعه‌ی جواب مورد نظر برابر است با:

$a\in\mathbb{R}-(-۴,۲)$

۱۵ - گزینه ۴ الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$(۳,۲)=(۳,a^۲-a)\Rightarrow a^۲-a=۲\Rightarrow a^۲-a-۲=۰$

$\Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}a=۲\\a=-۱\end{cases}$

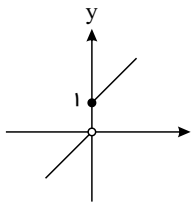
ب) شرط یک به یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند.

$(۳,۲)=(b,۲)\Rightarrow b=۳$

اما از میان دو مقدار به دست آمده برای $a$، باید یکی را به گونه ای انتخاب کنیم که شرایط (الف) و (ب) کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط $a=۲$ قابل قبول می‌باشد زیرا اگر $a=-۱$ باشد، دو زوج مرتب $(-۱,۴)$ و $(-۱,۵)$ در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه $(a,b)=(۲,۳)$ می‌باشد.

۱۶ - گزینه ۱ نمودار تابع $f$ برای اینکه یک به یک باشد باید بطور تقریبی به صورت مقابل باشد. یعنی باید شیب قسمت‌های $x<۰$ و $x\geq ۰$ هر دو به طور همزمان مثبت باشد. پس داریم:

$\begin{cases}۲-a>۰\\a>۰\end{cases}\Rightarrow a<۲\quad\Rightarrow ۰<a<۲$




تابع یک به یک

تنها گزینه یک در عبارت بالا صدق می‌کند پس گزینه ۱ صحیح است.

۱۷ - گزینه ۳ تابع درجه‌ی ۲ برای «رأس $x \geq (\frac{-b}{2a})$ یا $x \leq (\frac{-b}{2a})$» یک به یک است. چون در این حالت خطوط موازی محور $x$ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. لذا در این مسئله داریم:

منحنی‌های درجه‌ی دوم در بازه‌ای یک به یک است که رأس سهمی $(x = -\frac{b}{2a})$ درون آن بازه نباشد.

طول می‌نیمم تابع (رأس منحنی) فوق $x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$ است.

تنها دامنه‌ای که شامل $\frac{7}{2}$ نیست. گزینه (۳) است.

۱۸ - گزینه ۲

شرط تابع بودن $\rightarrow (4,2),(4,a^2-a) \Rightarrow a^2-a=2 \Rightarrow a^2-a-2=0$

$\Rightarrow (a-2)(a+1)=0 \Rightarrow a=2\ ,\ a=-1$

$a=-1 \Rightarrow f=\{(4,2),(-1,5),(b,2),(-1,4)\} \Rightarrow (-1,5)\in f\ ,\ (-1,4)\in f$

$f$ تابع نمی‌باشد پس $a=-1$ غیرقابل قبول است.

$a=2 \Rightarrow f=\{(4,2),(2,5),(b,2),(-1,4)\}$

شرط یک‌به‌یک بودن $\Rightarrow (4,2),(b,2) \Rightarrow b=4 \Rightarrow (a,b)=(2,4)$

۱۹ - گزینه ۴ یک تابع چند ضابطه‌ای در صورتی یک به یک است که اولاً هر دو ضابطهٔ آن یک به یک باشند ثانیاً اشتراک بردهای هر دو ضابطه تهی باشد.

هر دو ضابطهٔ تابع $f$ یک به یک است، در نتیجه $f$ وقتی یک به یک می‌باشد که اشتراک بردهای دو ضابطه تهی باشد.

$x \leq -1 \Rightarrow 3x \leq -3 \Rightarrow 3x-4 \leq -7 \Rightarrow y_1 \leq -7$

$x > -1 \Rightarrow -x < 1 \Rightarrow -x+m < m+1 \Rightarrow y_2 < m+1$

$m$ هر عددی و در هر محدوده‌ای که باشد، دو بُرد بالا اشتراک پیدا می‌کنند. پس به‌ازای هیچ مقداری از $m$ تابع یک به یک نمی‌شود.

۲۰ - گزینه ۲ با در نظر گرفتن شرط یک‌به‌یک بودن تابع داریم:

$(1,-2)=(a+1,-2) \Rightarrow a+1=1 \Rightarrow a=0$

$\Rightarrow f=\{(1,-2),(2,4),(6,0),(b+2,0),(c,b)\}$

$(6,0)=(b+2,0) \Rightarrow b+2=6 \Rightarrow b=4 \Rightarrow f=\{(1,-2),(2,4),(6,0),(c,4)\}$

$(2,4)=(c,4) \Rightarrow c=2 \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{4}{2}=2$

۲۱ - گزینه ۲

$f=\{(3,2),(a,5),(3,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$

شرط تابع بودن: $(3,2),(3,a^2-a) \Rightarrow a^2-a=2 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow (a-2)(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-1 \end{cases}$

$a=-1 \Rightarrow f=\{(3,2),(-1,5),(b,2),(-1,4)\} \Rightarrow$ تابع نیست.

$a=2 \Rightarrow f=\{(3,2),(2,5),(b,2),(-1,4)\}$ شرط یک‌به‌یک بودن: $(3,2),(b,2) \Rightarrow b=3$

$g(x)=ax+b \xrightarrow[b=3]{a=2} g(x)=2x+3 \Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

محل برخورد تابع $g$ با محور طول‌ها نقطهٔ $(-\frac{3}{2},0)$ می‌باشد.

۲۲ - گزینه ۲ تابع $f$ ، یک سهمی است. سهمی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ غیر یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است. برای وارن‌پذیری آن دامنه را باید به بازه‌ای تقلیل دهیم که طول رأس سهمی جزو نقاط درونی بازه نباشد.

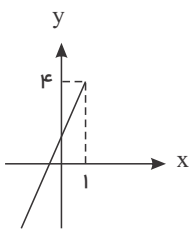
در این سؤال $x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$ است. بنابراین بازه‌ای که قابل قبول است که $x=2$ جزو نقاط درونی آن نباشد. تنها بازه‌ای که ویژگی موردنظر را دارد.

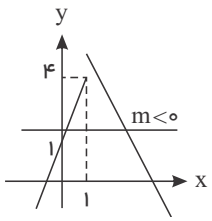
بازهٔ $(-8,-6)$ است.

۲۳ - گزینه ۲

نمودار قسمت اول تابع $(x \leq ۱)$ به‌صورت روبه‌رو است. با توجه به این‌که قسمت دوم تابع نیز به‌صورت یک خط راست با شیب $m$ می‌باشد، واضح است که $m$ نباید منفی شود، زیرا اگر $m$ منفی باشد، حالتی مانند نمودار دوم رخ می‌دهد که در این‌صورت می توان خطی موازی محور $x$ها یافت که نمودار تابع را در دو نقطه قطع کند. (رد گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴»)

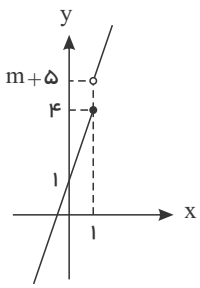
همچنین $m$ نباید برابر با صفر شود زیرا در این‌صورت تابع ثابت خواهد شد و یک‌به‌یک نمی‌شود.




با شرط $m > ۰$، نمودار تابع به‌صورت زیر می‌شود. برای آن‌که این نمودار مربوط به یک تابع یک‌به‌یک باشد، باید شرط $m + ۵ \geq ۴$ برقرار باشد که در نتیجه:

$$\begin{cases} m + ۵ \geq ۴ \Rightarrow m > -۱ \\ m > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > ۰$$



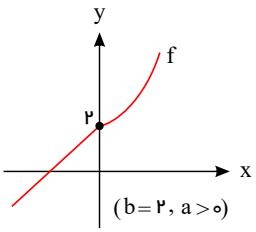

۲۴ - گزینه ۱

برای آن‌که تابع $f(x)$، یک‌به‌یک باشد، باید:

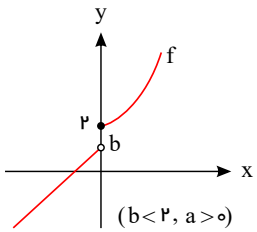
۱) شیب خط $ax + b$ باید مثبت باشد. $(a > ۰)$

۲) عرض از مبدأ خط باید کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد. $(b \leq ۲)$

با توجه به شرایط فوق، نمودار $f(x)$ به یکی از حالت‌های زیر می‌تواند باشد:




یا




۲۵ - گزینه ۳

$$D_f \cap D_g = [-۱, ۲]$$

$$-۱ \leq x < ۱ \Rightarrow h(x) = g(x) - f(x) + m = g(x) - (-۱) + m = g(x) + ۱ + m$$

حال ضابطهٔ $g(x)$ را در بازهٔ $[-۱, ۱)$ می‌یابیم.

$$(-۱, ۰), (۱, ۲) \Rightarrow m = \frac{۲ - ۰}{۱ - (-۱)} = ۱ \ , \ y - ۰ = ۱(x + ۱) \Rightarrow y = x + ۱$$

$$-۱ \leq x < ۱ \Rightarrow h(x) = x + ۱ + ۱ + m = x + ۲ + m$$

$$۱ \leq x \leq ۲ \Rightarrow h(x) = f(x) \cdot g(x) = ۲f(x)$$

حال ضابطهٔ $f(x)$ را در بازهٔ $[۱, ۲]$ می‌یابیم.

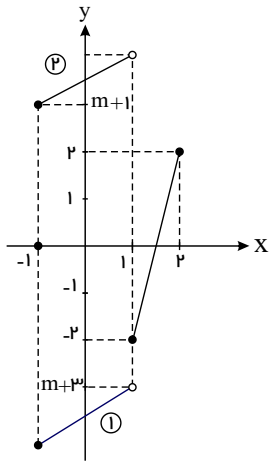
$$(۱, -۱), (۲, ۱) \Rightarrow m = \frac{۱ - (-۱)}{۲ - ۱} = ۲ \ , \ y - ۱ = ۲(x - ۲) \Rightarrow y = ۲x - ۳$$

$$۱ \le x \le ۲ \Rightarrow h(x) = ۲(۲x - ۳) = ۴x - ۶$$

$$h(x) = \begin{cases} ۴x - ۶ & ; ۱ \le x \le ۲ \\ x + ۲ + m & ; -۱ \le x < ۱ \end{cases}$$

| $x$ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|
| $y$ | $-۲$ | ۲ |

| $x$ | $-۱$ | ۱ |
|---|---|---|
| $y$ | $m+۱$ | $m+۳$ |




$(۱) \Rightarrow m + ۳ \le -۲$ یا $(۲) \Rightarrow m + ۱ > ۲$

$m \le -۵$ یا $m > ۱ \Rightarrow m \in (-\infty, -۵] \cup (۱, +\infty)$