پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ روش اول:

$$۲x - ۳ = t \to ۲x = t + ۳ \to x = \frac{t+۳}{۲}$$

$$\text{پس}: f(t) = ۴(\frac{t+۳}{۲})^۲ - ۱۴(\frac{t+۳}{۲}) + ۱۳ \to f(t) = (t+۳)^۲ - ۷(t+۳) + ۱۳$$

$$\to f(t) = t^۲ + ۹ + ۶t - ۷t - ۲۱ + ۱۳ \to f(t) = t^۲ - t + ۱ \to f(x) = x^۲ - x + ۱$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x = ۲$ را انتخاب می‌کنیم.

$$f(۲x - ۳) = ۴x^۲ - ۱۴x + ۱۳ \xrightarrow{x=۲} f(۱) = ۱۶ - ۲۸ + ۱۳ \to f(۱) = ۱$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

۲ - گزینه ۲ باتوجه به تابع $f(x)$، عبارت $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x) = \frac{۲x}{x-۱} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{۲g(x)}{g(x)-۱} = x$$

$$\Rightarrow x \cdot g(x) - x = ۲g(x) \Rightarrow g(x) \cdot (x-۲) = x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x}{x-۲} \Rightarrow g(۴) = \frac{۴}{۴-۲} = ۲$$

۳ - گزینه ۱

$$fog(x) = ۲g(x) + ۸ \Rightarrow f(g(x)) = ۲g(x) + ۸ \Rightarrow f(x) = ۲x + ۸$$
$$gof(x) = g(۲x + ۸) = x^۲$$

برای ایجاد $g(۴)$ باید قرار دهیم $۲x + ۸ = ۴$ لذا $x = -۲$.

$$\Rightarrow g(۴) = (-۲)^۲ = ۴$$

۴ - گزینه ۲

$$g(x) = ۲x - ۱, (fog)(x) = \frac{x}{x-۳} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{x}{x-۳}$$
$$g(x) = ۳ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲$$
$$f(g(x)) = \frac{x}{x-۳} \xrightarrow{g(x)=۳, x=۲} f(۳) = \frac{۲}{۲-۳} = -۲$$

۵ - گزینه ۱

با تغییر متغیر داریم:

$$x - \frac{۱}{x} = t \to x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۲ = t^۲ \to x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = t^۲ + ۲$$

$$f(x - \frac{۱}{x}) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۴ \xrightarrow{(x-\frac{۱}{x})=t} f(t) = t^۲ - ۲ \Rightarrow f(x) = x^۲ - ۲$$

۶ - گزینه ۱

به کمک تابع $f(x)$ تابع $y = f(g(x))$ را می‌سازیم و مساوی تابع $y = fog(x)$ که صورت سؤال داده قرار می‌دهیم تا $g(x)$ محاسبه شود.

$$f(g(x)) = \frac{g(x)+۱}{g(x)-۱} = \frac{-x-۱}{x-۱} \Rightarrow xg(x) - g(x) + x - ۱ = -xg(x) - g(x) + x + ۱$$

$$\Rightarrow ۲xg(x) = ۲ \Rightarrow g(x) = \frac{۱}{x}$$

۷ - گزینه ۴

می‌دانیم :

$$\boxed{\cos^۲ u - ۱ = \cos ۲u}$$

$$f(2\cos x) = 4\cos^2 x - 2 = 2\underbrace{(2\cos^2 x - 1)}_{\cos 2x} = 2\cos 2x$$

$$f(f(2\cos 2x)) = 4\cos^2 2x - 2 = 2\underbrace{(2\cos^2 2x - 1)}_{\cos 4x} = 2\cos 4x$$

$$f(f(f(2\cos x))) = 4\cos^2 4x - 2 = 2\underbrace{(2\cos^2 4x - 1)}_{\cos 8x} = 2\cos 8x$$

۸ - گزینه ۳ کافی است x را به $x+1$ تبدیل کنیم. داریم:

$$f(x+1+1) = -f(x+1) \Rightarrow f(x+2) = f(x)$$

۹ - گزینه ۲

برای محاسبه‌ی $f(g(3))$ ابتدا $g(3)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$g(f(x)) = x^2 + x - 2 \xrightarrow{f(x)=2x+1} g(2x+1) = x^2 + x - 2$$

$$\xrightarrow{x=1} g(3) = 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow g(3) = 0 \Rightarrow f(g(3)) = f(0) = 2(0) + 1 = 1$$

۱۰ - گزینه ۲ ابتدا تابع $fog(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x) = x - \sqrt{x} \to fog(x) = f(g(x)) = f(x - \sqrt{x})$$

برای محاسبه ریشه‌های معادله $f(x-\sqrt{x}) = 0$ ابتدا باید ببینیم که تابع $f(x)$ چند بار محور xها را قطع می‌کند همانطور که می‌دانیم:

$$f(6) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \to x^2 - 12x + 36 = x$$

$$\Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \quad \begin{matrix} x = 4 \text{ غ ق ق} \\ x = 9 \end{matrix}$$

$$f(-\tfrac{1}{4}) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x} = -\tfrac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} + \tfrac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - \tfrac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \tfrac{1}{2} \qquad x = \tfrac{1}{4}$$

پس تابع fog دو بار محور xها را قطع می‌کند.

۱۱ - گزینه ۳

ابتدا از روی ضابطه‌ی توابع $f(x)$ و $gof(x)$، ضابطه $g(x)$ را یافته، سپس ضابطه fog را می‌یابیم.

$$f(x) = 2x + 3$$
$$g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$$
$$g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20$$
$$2x + 3 = t \to x = \frac{t-3}{2} \to g(t) = 2(t^2 - 6t + 9) + 11(t-3) + 20 \to g(x) = 2x^2 - x + 5$$
$$(fog)(x) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

۱۲ - گزینه ۳

می‌دانیم:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b3}$$

در رابطه $f(x+\frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ فرض می کنیم $x + \frac{1}{x} = t$ باشد و سپس طرفین را به توان ۳ می رسانیم خواهیم داشت.

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x} = t^3 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$$

لذا $f(t) = t^3 - 3t$ در نتیجه $f(\sqrt{5}) = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

۱۳ - گزینه ۱

ابتدا باید تابع $g(x)$ را بیابیم به این صورت که ابتدا با داشتن $f(x)$، $fog(x)$ را تشکیل میدهیم و سپس با fog صورت مسئله مساوی قرار میدهیم.

(راه حل اول):

$$f(g(x)) = 2g(x)^2 + 4 = 4x^2 + 6x \Rightarrow g(x) = \pm\sqrt{2x^2 + 3x - 2} \Rightarrow g(-2) = 0$$

(راه حل دوم):

$$fog(x) = f(g(x)) = 4x^2 + 6x \xrightarrow{x=-2} = f(g(-2)) = 4 \xrightarrow{f(x)=2x^2+4} 2(g(-2))^2 + 4 = 4 \Rightarrow g(-2) = 0$$

۱۴ - گزینه ۲

$$f(x) = \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}$$

رابطهٔ فوق یعنی $f(x)$ میانگین حسابی $f(x+1)$ و $f(x-1)$ می‌باشد و می‌دانیم فقط توابع خطی این خاصیت را دارند، پس داریم:

$f(x) = ax + b$

$$\begin{array}{l} f(-۱) = -۳ \Rightarrow \\ f(۲) = -۱ \quad \Rightarrow \end{array} \begin{cases} -a + b = -۳ \\ ۲a + b = -۱ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}\ ,\ b = -\frac{۷}{۳} \Rightarrow f(x) = \frac{۲}{۳}x - \frac{۷}{۳}$$

$$f(۵) = \frac{۲}{۳} \times ۵ - \frac{۷}{۳} = \frac{۱۰ - ۷}{۳} = ۱$$

۱۵ - گزینه ۳ ابتدا تابع $g(x) = ۲x - ۳$ را در داخل تابع $fog(x)$ می‌سازیم بنابراین داریم:

$$(fog)(x) = ۴(x^۲ - ۴x + ۵) = ۴x^۲ - ۱۶x + ۲۰$$
$$= ۴x^۲ - ۱۲x + ۹ - ۴x + ۶ + ۵$$
$$= (۲x - ۳)^۲ - ۲(۲x - ۳) + ۵$$
$$= g^۲(x) - ۲g(x) + ۵ \Rightarrow f(x) = x^۲ - ۲x + ۵$$

راه حل تستی

قرار می دهیم $x = ۲$:

$$g(۲) = ۴ - ۳ = ۱$$
$$f(g(۲)) = f(۱) = ۴(۴ - ۸ + ۵) = ۴$$

در گزینه ها تابعی را می یابیم که $f(۱) = ۴$ باشد. اگر بیش از یک گزینه باقی ماند با یک عدد دیگر همین روند را تکرار می کنیم.

۱۶ - گزینه ۲ f یک تابع خطی است بنابراین $f(x) = ax + b$ است.

$$f(x - ۱) + f(x + ۲) = x \to (ax - a + b) + ax + ۲a + b = x$$
$$\to ۲ax + a + ۲b = x \to \begin{cases} ۲a = ۱ \to a = \frac{۱}{۲} \\ a + ۲b = ۰ \to b = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$
$$\to f(x) = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴} \to f(۲) = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

۱۷ - گزینه ۲

$$f(x) = \frac{x + ۱}{x + a} \Rightarrow f(-\frac{۱}{x}) = \frac{-\frac{۱}{x} + ۱}{-\frac{۱}{x} + a} = \frac{\frac{-۱+x}{x}}{\frac{-۱+ax}{x}} = \frac{x - ۱}{ax - ۱}$$
$$f(x) \cdot f(-\tfrac{۱}{x}) = \frac{x + ۱}{x + a} \times \frac{x - ۱}{ax - ۱} = \frac{x^۲ - ۱}{(x + a)(ax - ۱)} = -۱$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۱ = -(ax^۲ - x + a^۲x - a) \Rightarrow x^۲ - ۱ = -ax^۲ + x - a^۲x + a$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۱ = -ax^۲ + (۱ - a^۲)x + a \Rightarrow \left.\begin{cases} -a = ۱ & \Rightarrow a = -۱ \\ ۱ - a^۲ = ۰ & \Rightarrow a = \pm ۱ \\ a = -۱ \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a = -۱$$

۱۸ - گزینه ۱ چون عرض از مبدأ خط مورد نظرمهم نیست کافی است فرض کنیم $f(x) = -۳x$، در این صورت داریم:

$$f(f(f(x))) = f(-۳x) = ۹x$$
$$f(f(x)) = f(۹x) = -۲۷x$$
$$y = -۲۷x + ۹x - ۳x = -۲۱x$$ ضریب x شیب خط است.

۱۹ - گزینه ۱

تابع $f(\sqrt{x})$ را تشکیل می‌دهیم بنابراین:

$$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^۲ + \frac{۱}{(\sqrt{x})^۲} = x + \frac{۱}{x} \Rightarrow g(x) = (f(\sqrt{x}))^۲ - f(x) = (x + \frac{۱}{x})^۲ - (x^۲ + \frac{۱}{x^۲})$$
$$= (x^۲ + \frac{۱}{x^۲} + ۲) - (x^۲ + \frac{۱}{x^۲}) = ۲$$ **تابع ثابت**

۲۰ - گزینه ۴

$$\begin{array}{l} x > ۰ \to f(x) = \sqrt{x} \to f(x) > ۰ \\ x < ۰ \to f(x) = ۴ \to f(x) > ۰ \end{array} \Rightarrow -f(x) < ۰ \Rightarrow f(-f(x)) = ۴$$
$$\Rightarrow f(f(-f(x))) = f(۴) = \sqrt{۴} = ۲$$

۲۱ - گزینه ۱

با توجه به تابع $f(x)$ داده شد، $fog(x)$ را می‌سازیم و با تابع $fog(x)$ داده شده در صورت سوال مساوی قرار می‌دهیم تا تابع $y = g(x)$ پیدا شود.

$$f(g(x)) = g^۲(x) + ۲g(x) = x$$
$$\Rightarrow g^۲(x) + ۲g(x) - x = ۰ \xrightarrow{g(x)=t} t^۲ + ۲t - x = ۰$$
$$\Rightarrow t = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۴x}}{۲} = -۱ \pm \sqrt{۱ + x} \Rightarrow g(x) = -۱ \pm \sqrt{۱ + x}$$

چون دامنه‌ی f برابر $(-\infty, -۱]$ است، پس t و در نتیجه $g(x)$ باید کوچکتر از ۱- باشد پس $g(x) = -۱ - \sqrt{۱ + x}$ قابل قبول است.

۲۲ - گزینه ۳ راه حل اول: در تابع $y = ۳ - f(۲x)$ به ازای $x = ۴$ داریم: $y = ۳ - f(۸)$

در ضمن $f(x+۳) = x + \frac{۵}{x}$ به ازای $x = ۵$, $f(۸)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(۸) = ۵ + \frac{۵}{۵} = ۶ \Rightarrow y = ۳ - f(۸) = ۳ - ۶ = -۳$$

پس نمودار تابع $y = ۳ - f(۲x)$ از نقطه‌ی $(۴, -۳)$ می‌گذرد.

روش دوم: از رابطه‌ی $f(x+۳) = x + \frac{۵}{x}$ ، ضابطه‌ی مربوط به $y = f(x)$ و سپس $y = ۳ - f(۲x)$ را به دست آورده و گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

۲۳ - گزینه ۴ در تابع خطی $f(x) = ax + b$ با توجه به فرض داریم:

$$f(۲x+۳) = ۲f(x) + ۳$$

$$\begin{array}{l} a(۲x+۳) + b = ۲(ax+b) + ۳ \Rightarrow ۳a - b = ۳ \\ f(-۱) = ۵ \Rightarrow -a + b = ۵ \end{array} \Rightarrow \begin{cases} ۳a - b = ۳ \\ -a + b = ۵ \end{cases}$$

از دو معادله حاصل خواهیم داشت: $a = ۴$, $b = ۹$ بنابراین $f(x) = ۴x + ۹$ می‌باشد پس:

$$f(\frac{۳}{۴}) = ۴(\frac{۳}{۴}) + ۹ = ۱۲$$

۲۴ - گزینه ۱

با توجه به ماشین داده شده داریم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{۱}{x+۱} \Rightarrow g(\frac{x}{۱+x}) = \frac{۱}{x+۱}$$
$$\Rightarrow g(\frac{x+۱-۱}{x+۱}) = \frac{۱}{x+۱} \Rightarrow g(۱ - \frac{۱}{x+۱}) = \frac{۱}{x+۱}$$
$$۱ - \frac{۱}{x+۱} = t \Rightarrow \frac{۱}{x+۱} = ۱ - t \Rightarrow g(t) = ۱ - t \Rightarrow g(x) = ۱ - x$$

۲۵ - گزینه ۴

عبارت را ساده‌تر می‌کنیم تا دو طرف تساوی جملات مشابه داشته باشند بنابراین:

$$f\left(\frac{-x}{x+۱}\right) = f\left(\frac{-x-۱+۱}{x+۱}\right) = f\left(-۱ + \frac{۱}{x+۱}\right)$$

با فرض $\frac{۱}{x+۱} = t$ و $x \neq -۱$ خواهیم داشت:

$$f(-۱+t) = t \xrightarrow{t=u+۱} f(u) = u + ۱ \Rightarrow f(x) = x + ۱$$

۲۶ - گزینه ۴ با تغییر متغیر داریم:

$$f(x) = x^۲ + ۴x \xrightarrow{g(x+۱)=t} f(t) = t^۲ + ۴t$$

از طرفی $f(t) = x^۲ - ۶x + ۵$، پس:

$$t^۲ + ۴t = x^۲ - ۶x + ۵ \xrightarrow{+۴} (t+۲)^۲ = (x-۳)^۲$$

$$\Rightarrow |t+۲| = |x-۳| \Rightarrow \begin{cases} t + ۲ = x - ۳ \Rightarrow t = x - ۵ \\ t + ۲ = -x + ۳ \Rightarrow t = -x + ۱ \end{cases}$$

$$g(x+۱) = x - ۵ \Rightarrow g(x) = x - ۶ \qquad g(x+۱) = -x + ۱ \Rightarrow g(x) = -x + ۲$$

۲۷ - گزینه ۱

$$(x + \frac{۱}{x})^۲ - (x - \frac{۱}{x})^۲ = ۴ \Rightarrow (x + \frac{۱}{x})^۲ = ۴ + (x - \frac{۱}{x})^۲$$
$$x + \frac{۱}{x} = \pm\sqrt{۴ + (x - \frac{۱}{x})^۲} \Rightarrow f(x - \frac{۱}{x}) = \pm\sqrt{۴ + (x - \frac{۱}{x})^۲} + ۶$$
$$\xrightarrow{x - \frac{۱}{x} = t} f(t) = \pm\sqrt{۴ + t^۲} + ۶ \Rightarrow f(\sqrt{۲}) = \pm\sqrt{۶} + ۶$$

۲۸ - گزینه ۳

به کمک تعریف تابع $f(x)$، تابع $g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

می‌دانیم $۰ \leq x - [x] < ۱$

$$g(x) = f(۲x - ۳) - ۲f(x) = ((۲x - ۳) - [۲x - ۳]) - ۲(x - [x])$$
$$= ۲x - [۲x] - ۲x + ۲[x] = -[۲x] + ۲[x] = -[۲x - ۲[x]] = -[۲(x - [x])]$$
$$۰ \leq ۲x - ۲[x] < ۲ \Rightarrow [۲x - ۲[x]] = ۰, ۱ \Rightarrow -[۲x - ۲[x]] = ۰, -۱$$

بنابراین گزینهٔ ۳ صحیح است.

۲۹ - گزینه ۴

f یک تابع خطی است که محور yها را با عرض ۲ قطع می‌کند، پس $g \cdot f(x) = mx + ۲$ یک تابع درجه دوم است که محور yها را با عرض ۳ قطع می‌کند، پس $g(x) = ax^۲ + bx + ۳$.

$(fog)(x) = f(g(x)) = m(ax^۲ + bx + ۳) + ۲$

$\Rightarrow (fog)(x) = \max^۲ + mbx + (۳m + ۲)$

اما طبق فرض سؤال $(fog)(x) = ۲x^۲ + x - ۱$، پس، داریم:

$$\begin{cases} (fog)(x) = \max^۲ + mbx + (۳m + ۲) \\ (fog)(x) = ۲x^۲ + x - ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳m + ۲ = -۱ \Rightarrow m = -۱ \\ mb = ۱ \xrightarrow{(*)} -b = ۱ \Rightarrow b = -۱ \\ ma = ۲ \xrightarrow{(*)} -a = ۲ \Rightarrow a = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x + ۲ \\ g(x) = -۲x^۲ - x + ۳ \end{cases}$$

$\Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (-x + ۲) - (-۲x^۲ - x + ۳) = ۲x^۲ - ۱$

۳۰ - گزینه ۲ چون f تابعی خطی است، پس قابل نمایش به صورت $f(x) = ax + b$ است و چون fog و gof هر دو درجه ۲ هستند، $g(x)$ یک تابع درجه ۲ است. داریم:

$$f(g(x)) = ag(x) + b = ۶x^۲ - ۲x + ۳ \Rightarrow g(x) = \frac{۶}{a}x^۲ - \frac{۲}{a}x + \frac{۳ - b}{a}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{۶}{a}f^۲(x) + \frac{۳ - b}{a} - \frac{۲}{a}f(x)$$

$$= ۱۲x^۲ - ۱۴x + ۶ \Rightarrow \frac{۶}{a}(ax + b)^۲ - \frac{۲}{a}(ax + b) + \frac{۳ - b}{a} = ۱۲x^۲ - ۱۴x + ۶$$

$$\xrightarrow{\text{ضرایب نامعین}} \begin{cases} ۶ax^۲ = ۱۲x^۲ \Rightarrow a = ۲ \\ ۱۲bx - ۲x = -۱۴x \Rightarrow b = -۱ \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = ۲x - ۱ \Rightarrow f(۲) = ۳$