پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ است.

$$f^{-1}(g(۲a))=۶\to f(۶)=g(۲a)\to ۳=\frac{۲a}{۲a-۱}\to ۶a-۳=۲a\to ۴a=۳\to a=\frac{۳}{۴}$$

۲ - گزینه ۱ دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند و می‌دانیم برای پیدا کردن ضابطه‌ای معکوس یک تابع، ابتدا رابطه را برحسب x بدست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$۳y-۲x=۴\to ۲x=۳y-۴\to x=\frac{۳}{۲}y-۲\to f^{-1}(x)=\frac{۳}{۲}x-۲\xrightarrow{x=۰}\text{عرض از مبدأ}=-۲$$

۳ - گزینه ۱ از آنجایی که $(gof)^{-1}(x)=(f^{-1}og^{-1})(x)$ است. ضابطه تابع gof را تعیین می‌کنیم.

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{-۲x+۳}{x-۱})=\frac{\frac{-۲x+۳}{x-۱}+۳}{\frac{-۲x+۳}{x-۱}+۲}=\frac{x}{۱}=x$$

چون $(gof)(x)=x$ معکوس تابع همانی خود تابع همانی است پس ضابطه $(gof)^{-1}(x)$ برابر x است.

۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

$$g^{-1}of^{-1}=(fog)^{-1}\Rightarrow fog(x)=f(g(x))=f(x^۲)=۱+x$$
$$\Rightarrow y=x+۱\Rightarrow y-۱=x\Rightarrow (fog)^{-1}=x-۱$$

۵ - گزینه ۳ چون دو زوج متمایز مؤلفه‌ی اول یکسان دارند پس تابع نیست. R^{-1} هم تابع نیست چون ۲ زوج مرتب $(1,b)$, $(1,a)$ خاصیت تابع بودن R^{-1} را نقض می‌کنند.

۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: $f(a)=b\Rightarrow f^{-1}(b)=a$

$$f^{-1}og(a)=f^{-1}(g(a))=۶\Rightarrow f(۶)=g(a)$$
$$f(۶)=۲(۶)-۵=۷\Rightarrow g(a)=۷\xrightarrow{(۴,۷)\in g}a=۴$$

۷ - گزینه ۳ برای محاسبهٔ ضابطهٔ معکوس یک تابع باید x را تنها کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

وقتی $۱\le x<۲$ باشد $[x]=۱$ است معکوس تابع صعودی $f(x)=x-۱$ به صورت $y=x+۱, ۰\le x<۱$ می باشد.

میدانیم که $D_f=R_{f^{-۱}}$

۸ - گزینه ۴

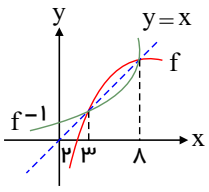
$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}\quad,\quad g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$$

$$g^{-1}=\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}\Rightarrow g^{-1}of=\{(۱,۴),(۴,۵)\}$$

$$g^{-1}of-f=\{(۱,۴-۲),(۴,۵-۶)\}=\{(۱,۲),(۴,-۱)\}\Rightarrow \text{برد}=\{۲,-۱\}$$

۹ - گزینه ۴ برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$x-f^{-1}(x)\ge ۰\to x\ge f^{-1}(x)$$



نمودارهای f و f^{-1} نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم متقارن هستند و باتوجه به $x\ge f^{-1}(x)$ باید به دنبال فواصلی باشیم که خط $y=x$ بزرگ‌تر مساوی تابع f^{-1} باشد یعنی $[۳,۸]$.

۱۰ - گزینه ۲ ابتدا وارون تابع داده شده را پیدا کرده و آن را با تابع اصلی تلاقی می‌دهیم و می‌دانیم برای پیدا کردن تابع وارون کافی است که x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=\frac{x+۴}{x-۲}\to xy-۲y=x+۴\to xy-x=۲y+۴\to x(y-۱)=۲y+۴\to x=\frac{۲y+۴}{y-۱}$$
$$\to f^{-1}(x)=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

تلاقی: $f(x)=f^{-1}(x)\to\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۲x+۴}{x-۱}\to ۲x^۲-۴x+۴x-۸=x^۲-x+۴x-۴$

$$\rightarrow x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\dfrac{c}{a} = ۴ \end{cases}$$

۱۱ - گزینه ۱ روش اول:

$$\begin{cases} x \geq ۰ \ ; \ y = \dfrac{x}{۱+x} \Rightarrow y + xy = x \Rightarrow x = \dfrac{y}{۱-y} \xrightarrow{x \geq ۰} \dfrac{y}{۱-y} \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \leq y < ۱ \quad (۱) \\ x \leq ۰ \ ; \ y = \dfrac{x}{۱-x} \Rightarrow y - xy = x \Rightarrow x = \dfrac{y}{۱+y} \xrightarrow{x \leq ۰} \dfrac{y}{۱+y} \leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ < y \leq ۰ \quad (۲) \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$x = \begin{cases} \frac{y}{۱-y} \ ; \ ۰ \leq y < ۱ \\ \frac{y}{۱+y} \ ; \ -۱ < y \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y}{۱-|y|} \ , \ |y| < ۱ \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{۱-|x|} \ ; \ |x| < ۱$$

روش دوم:

می‌توانید نقطه‌ی دلخواهی از تابع را در نظر گرفته و جای x و y را عوض کرده و کنترل کنیم که این مختصات در کدام ضابطه صدق می‌کند. به عنوان مثال، نقطه‌ی $(۲, \frac{۲}{۳})$ متعلق به تابع است. پس نقطه‌ی $(\frac{۲}{۳}, ۲)$ متعلق به ضابطه‌ی تابع وارون می‌باشد. با کمی دقت پی می‌بریم که این مختصات تنها در گزینه‌ی ۱ صدق می‌کند.

۱۲ - گزینه ۱

روش اول:

ضابطه‌ی بالا: $y = \sqrt{x} \ , \ x \geq ۰ \Rightarrow y \geq ۰ \Rightarrow y^{۲} = x \Rightarrow f^{-۱}(x) = x^{۲} \ , \ x \geq ۰$

ضابطه‌ی پایین: $y = -\sqrt{-x} \ , \ x < ۰ \Rightarrow y < ۰ \Rightarrow y^{۲} = -x \Rightarrow x = -y^{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -x^{۲} \ , \ x < ۰$

بنابراین ضابطه‌ی تابع وارون به‌صورت $f^{-۱}(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \geq ۰ \\ -x^{۲} & x < ۰ \end{cases}$ و یا به‌صورت $f^{-۱}(x) = x|x| \ , \ x \in R$ است.

روش دوم:

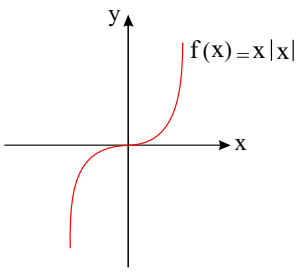
یک x دلخواه در تابع قرار می‌دهیم.

$$x = ۴ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۲ \quad \left| \begin{matrix} ۴ \\ ۲ \end{matrix} \right. \in f \Rightarrow \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۴ \end{matrix} \right. \in f^{-۱}$$

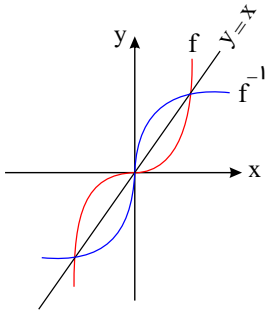
گزینه ای درست است که اگر به جای x آن ۲ قرار دهیم حاصل ۴ می شود. (گزینه‌ی اول)

۱۳ - گزینه ۳

$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^{۲} & x \geq ۰ \\ -x^{۲} & x < ۰ \end{cases} \rightarrow$$



برای رسم تابع معکوس، کافی است قرینه‌ی شکل را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، رسم کنیم.



۱۴ - گزینه ۴ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آنگاه $f^{-۱}(b) = a$ است.

$$(g^{-۱} o f^{-۱})(۸) = g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$$

برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۸)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$۸ = \frac{۲}{۵}x - ۴ \rightarrow \frac{۲}{۵}x = ۱۲ \rightarrow ۲x = ۶۰ \rightarrow x = ۳۰$$

پس : $g^{-۱}(f^{-۱}(۸)) = g^{-۱}(۳۰)$

برای محاسبهٔ $g^{-1}(30)$ بدین صورت عمل می‌نماییم.

$30 = x^3 + x \to x = 3$

۱۵ - گزینه ۴

$f^{-1} = \{(2,1),(5,2),(3,0),(-1,4)\} \quad , \quad g = \{(2,3),(-1,4),(4,1),(3,0)\}$

$$gof^{-1}(x) = g(f^{-1}(x)) = \left.\begin{array}{l} g(f^{-1}(2)) = g(1) = \varnothing \\ g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \\ g(f^{-1}(3)) = g(0) = \varnothing \\ g(f^{-1}(-1)) = g(4) = 1 \end{array}\right\} \to gof^{-1}(x) = \{\,(5,3)(-1,1)\,\}$$

۱۶ - گزینه ۱

ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 = (2-y)^2 \Rightarrow x - 1 = 4 - 4y + y^2$

$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 \ , \ x \le 2$

چون $\sqrt{x-1}$ مثبت است، پس $-\sqrt{x-1}$ منفی بوده و $y = 2 - \sqrt{x-1}$ همواره کوچک تر مساوی ۲ می شود، بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس $x \le 2$ است.

۱۷ - گزینه ۴ تابع را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم

$x \le -2 \Rightarrow f(x) = -3x - 6 + 3x - 3 - 4x = -4x - 9$

$-2 < x < 1 \Rightarrow f(x) = 3x + 6 + 3x - 3 - 4x = 2x + 3$

$x \ge 1 \Rightarrow f(x) = 3x + 6 - 3x + 3 - 4x = -4x + 9$

تابع مفروض $-2 < x < 1$ و $f(x) = 2x + 3$ صعودی است.

$y = 2x + 3 \to x = \dfrac{y-3}{2} \to f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

$-2 < x < 1 \to -1 < 2x + 3 < 5 \to D_{f^{-1}} = (-1,5)$

۱۸ - گزینه ۲ تابعی معکوس‌پذیر است که در آن فاصله اکیداً سعودی یا اکیداً نزولی باشد.

تابع $f(x) = |2x-1| - |2x+6|$ را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 + 2x + 6 = 7 & x < -3 \\ -2x + 1 - 2x - 6 = -4x - 5 & -3 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x - 1 - 2x - 6 = -7 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

تابع با ضابطه $f(x) = -4x - 5$ در بازه $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$ معکوس‌پذیر است. چون ضریب x منفی بوده و تابع اکیداً نزولی است پس معکوس آن به صورت $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}(x+5)$ در بازه $[-7,7]$ است. پس ضابطه وارون $-\frac{1}{4}(x+5), |x| \le 7$

۱۹ - گزینه ۱ می‌دانیم $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ پس خواهیم داشت.

$\dfrac{2a-1}{2-3a} = -\dfrac{10+\sqrt{2}}{14} \Rightarrow 28a - 14 + 20 + 2\sqrt{2} - 30a - 3a\sqrt{2} = 0$

$a(2 + 3\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 6 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

۲۰ - گزینه ۲

می‌دانیم: اگر $f(x)$ تابع معکوس‌پذیر باشد و $A\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right.$ روی $f(x)$ باشد آنگاه:

$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$

$g^{-1}(6) = a \Rightarrow g(a) = 6$

$g(a) = f(a) + \sqrt{f(a)} \Rightarrow 6 = f(a) + \sqrt{f(a)} \Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = a \Rightarrow f^{-1}(4) = 2 \Rightarrow a = 2$

۲۱ - گزینه ۳ با توجه به ماشین داده شده $g(f(x)) = x$ است یعنی $g(x) = f^{-1}(x)$.

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(0) = \dfrac{1}{2}$

۲۲ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\}$$

ابتدا f^{-1} را می‌نویسیم:

$f^{-1} = \{(2,1),(5,2),(4,3),(6,4)\}$

و سپس gof^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$gof^{-1}=\{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$$

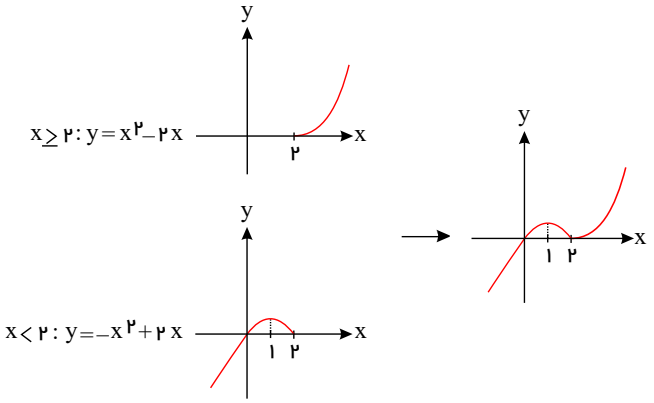
حال زوج‌مرتب $\frac{g}{gof^{-1}}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{g}{gof^{-1}}=\{(۵,۲),(۴,۲)\}$$

۲۳ - گزینه ۳ ابتدا با تعیین علامت، قدرمطلق را بر می‌داریم:

$$y=\begin{cases} x^۲-۲x & x\geq ۲ \\ -x^۲+۲x & x<۲ \end{cases}$$

برای تشخیص نزولی بودن از تابع مشتق گرفته کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.



پس تابع در $(۱,۲)$ نزولی است حال ضابطه‌ی معکوس را پیدا می‌کنیم.

$$y=-x^۲+۲x\to y=-(x^۲-۲x)\to y=-((x-۱)^۲-۱)\to y=-(x-۱)^۲+۱$$
$$\to (x-۱)^۲=۱-y\to x-۱=\pm\sqrt{۱-y}\xrightarrow[\text{سمت چپ مثبت است}]{۱<x<۲} x-۱=\sqrt{۱-y}\to x=۱+\sqrt{۱-y}$$
$$\to f^{-1}(x)=۱+\sqrt{۱-x}$$

روش دوم:

متوجه شدیم که تابع، $y=-x^۲+۲x$ $(۱<x<۲)$ است یک عدد دلخواه مثلاً $x=\frac{۳}{۲}$ در تابع قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{۳}{۲}\to y=\frac{۳}{۴}\to \left|\begin{matrix}\frac{۳}{۲}\\ \frac{۳}{۴}\end{matrix}\right. \in f\to \left|\begin{matrix}\frac{۳}{۴}\\ \frac{۳}{۲}\end{matrix}\right. \in f^{-1}\to$$ فقط در گزینه‌ی سوم صدق می‌کند.

۲۴ - گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , x\neq ۰\\ ۰ & , x=۰\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{x} & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$$

$$y=\sqrt{x}\to x=y^۲\to f^{-1}(x)=x^۲\ ,\ \overbrace{x>۰}^{y_۱=\sqrt{x}\ \text{برد}}$$
$$y=-\sqrt{-x}\to -x=y^۲\to x=-y^۲\to f^{-1}(x)=-x^۲\ ,\ \underbrace{x<۰}_{y_۲=-\sqrt{-x}\ \text{برد}}$$
$$\to f^{-1}(x)=\begin{cases}x^۲ & , x>۰\\ ۰ & , x=۰\\ -x^۲ & , x<۰\end{cases}\to f^{-1}(x)=x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

۲۵ - گزینه ۴ برای پیدا کردن تابع وارون، کافی است x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$f(x)=x^۲-۲x-۳\to y=(x-۱)^۲-۱-۳\to y=(x-۱)^۲-۴\to (x-۱)^۲=y+۴$$

$$\to x-۱=\pm\sqrt{(y+۴)}\xrightarrow{x\geq ۱} x-۱=\sqrt{y+۴}\to x=۱+\sqrt{y+۴}\to f^{-1}(x)=۱+\sqrt{x+۴}$$

$$f^{-1}(x)=g(x)\to ۱+\sqrt{x+۴}=\frac{x-۹}{۲}\xrightarrow{\text{مشاهدهٔ گزینه‌ها}} x=۲۱$$

توجه کنید حل معادلهٔ آخر بدین صورت است:

$$۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴x+۱۶=x^۲+۱۲۱-۲۲x\to x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰$$

$$\rightarrow (x-۲۱)(x-۵)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۲۱ & \text{ق ق} \\ x=۵ & \text{غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

۲۶ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: $\log a^b = b \cdot \log a \quad , \quad \log_a^a e = ۱$

ابتدا $f^{-۱}(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x)=۴-۳^{۲x} \rightarrow y=۴-۳^{۲x} \rightarrow ۳^{۲x}=۴-y \xrightarrow[\text{پایهٔ سه می‌گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم در}} ۲x=\log_۳(۴-y) \rightarrow x=\frac{۱}{۲}\log_۳(۴-y)$$

$$\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}\log_۳(۴-x) \qquad ۴-x>۰ \rightarrow x<۴ \rightarrow D_{f^{-۱}}=(-\infty,۴)$$

$$g(x)=\sqrt{xf^{-۱}(x)} \Rightarrow g(x)=\sqrt{\frac{۱}{۲}x\cdot\log_۳(۴-x)} \Rightarrow \log_۳(۴-x)=۰ \Rightarrow ۴-x=۱ \Rightarrow x=۳$$

برای یافتن دامنهٔ $g(x)$ باید ریشه‌های عبارت زیر رادیکالی را بیابیم و سپس تعیین علامت کنیم.

x	$-\infty$		۰		۳		۴
$\frac{۱}{۲}x\log(۴-x)$		$-$		$+$		$-$	

جواب: $D_f=[۰,۳]$