

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ فرم کلی تابع خطی بصورت $f(x) = ax + b$ است که داریم:

$$f(x-1) + f(x+2) = x \Rightarrow a(x-1) + b + a(x+2) + b = x$$

$$\Rightarrow ax - a + b + ax + 2a + b = x \Rightarrow 2ax + a + 2b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \\ a + 2b = 0 \rightarrow \frac{1}{2} + 2b = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

پس: $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow f(2) = \frac{2}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

۲ - گزینه ۳

$g(x) = k$ تابع ثابت ، $h(x) = ax + b$ تابع خطی ، $f \Rightarrow f(x) = x$ تابع همانی

$$2f(-2) = g(2) \Rightarrow 2(-2) = k \Rightarrow k = -4 \Rightarrow g(x) = -4$$

$$h(-2) = g(0) + 1 \Rightarrow -2a + b = -4 + 1 \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -3 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -2$$

$$h(2) = f(2) + g(3) + 1 \Rightarrow 2a + b = 2 - 4 + 1 \Rightarrow 2a + b = -1$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x \geq 2 \Rightarrow x \geq 4$$

۳ - گزینه ۱ باتوجه به اینکه تابع $y = x$ همانی است، خواهیم داشت:

$$4a + b = 4a^2 + b + 1 \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow (2a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$4a + b^2 = 2b + 1 \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} 2 + b^2 = 2b + 1 \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = 0 \Rightarrow (b - 1)^2 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۴ - گزینه ۲ f یک تابع سه ضابطه ای است که هر سه ضابطه آن خطی هستند. ضابطه هر کدام را می نویسیم:

$$\text{ضابطه اول: } A(-2, 3), B(-3, 0) \Rightarrow m = \frac{3 - 0}{-2 + 3} = 3$$

$$y - 0 = 3(x + 3) \Rightarrow y = 3x + 9$$

$$\text{تابع ثابت} \xrightarrow{\text{ضابطه دوم}} y = 3$$

$$\text{ضابطه سوم: } C(1, 3), D(5, 0) \Rightarrow m = \frac{3 - 0}{1 - 5} = -\frac{3}{4}$$

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 5) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x + 9 & x < -2 \\ 3 & -2 \leq x \leq 1 \\ -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} & x > 1 \end{cases}$$

حال مقدار $f(11)$ و $f(-\frac{1}{3})$ را حساب می کنیم:

$$11 > 1 \Rightarrow f(11) = -\frac{3}{4}(11) + \frac{15}{4} = -\frac{9}{2}$$

$$-\frac{1}{3} < -2 \Rightarrow f(-\frac{1}{3}) = 3(-\frac{1}{3}) + 9 = 8$$

$$\Rightarrow f(11) + f(-\frac{1}{3}) = -\frac{9}{2} + 8 = -\frac{1}{2} = -0.5$$

۵ - گزینه ۴ اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$ باشد، داریم:

$$f(1) = a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - a \quad (1)$$

$$f(-1) = -a + b \Rightarrow f(f(-1)) = f(-a + b) = a(-a + b) + b = -a^2 + ab + b = -8$$

$$\Rightarrow -a^2 + a(2 - a) + 2 - a = -8 \Rightarrow -a^2 + 2a - a^2 + 2 - a = -8 \Rightarrow 2a^2 - a - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = \frac{5}{2} \end{cases}$$

چون شیب نمودار f منفی است، $a = \frac{5}{2}$ قابل قبول نیست. بنابراین داریم:

$$a = -2 \xrightarrow{(1)} b = 4 \Rightarrow f(x) = -2x + 4 \Rightarrow f(2) = 0$$

۶ - گزینه ۳ باتوجه به این که $f(x)$ یک تابع ثابت است. لذا $h(x) = g(x) - 16$ از درجه‌ی ۲ خواهد بود. از طرفی دامنه‌ی $f(x)$ عبارت است از $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ بنابراین اعداد ۲ و -۲ صفرهای تابع $h(x) = g(x) - 16$ هستند و داریم:

$$h(x) = g(x) - 16 = k(x - 2)(x + 2) = k(x^2 - 4)$$

$$\Rightarrow g(x) - 16 = kx^2 - 4k \xrightarrow{g(0)=0} k = 4 \Rightarrow g(x) = 4x^2 \Rightarrow h(x) = g(x) - 16 = 4(x^2 - 4)$$

از طرفی $f(x)$ برابر با یک مقدار ثابت مانند c است. پس:

$$f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{4(x^2 - 4)} = c \Rightarrow 2x^2 + ax + b = 4cx^2 - 16c$$

$$\begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ a = 0 \\ b = -16c = -16(\frac{1}{2}) = -8 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{f(b)}{g(a) - 2} = \frac{f(-8)}{g(0) - 2} = \frac{\frac{1}{2}}{-2} = -\frac{1}{4}$$

۷ - گزینه ۲ چون تابع $y = (\frac{1}{2})^{-f(x)+3}$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۸ قطع می‌کند، پس داریم:

$$8 = (\frac{1}{2})^{-f(0)+3}$$

$$(\frac{1}{2})^{-3} = (\frac{1}{2})^{-f(0)+3} \Rightarrow -3 = -f(0) + 3 \Rightarrow \boxed{f(0) = 6}$$

چون $f(x)$ تابعی ثابت است، پس داریم: $f(x) = 6$

پس حالا می‌توانیم نقاط تلاقی توابع f و g را مشخص کنیم:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] + 4 = 6 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow 4 \leq x < 6$$