پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$$[x^{۲}+x]=-۱ \Rightarrow -۱ \le x^{۲}+x<۰ \begin{cases} x^{۲}+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱<x<۰ \\ -۱ \le x^{۲}+x \Rightarrow x^{۲}+x+۱ \ge ۰ \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a>۰\ ,\ \Delta<۰} x \in R \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۱<x<۰$$

$$-۱<x<۰ \xrightarrow{\text{توان ۲۰}} ۰<x^{۲۰}<۱ \Rightarrow [x^{۲۰}]=۰$$

۲ - گزینه ۱ اگر $x^{۲}+x<۰$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $-۱<x<۰$ است.

$$x^{۲}+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -۱ & & ۰ & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} <۰ & & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array} \Rightarrow -۱<x<۰$$

حال برای تعیین حاصل $[x]+[x^{۲}]+[x^{۳}]+[x^{۴}]$ کافی است حدود عبارت‌های داخل جزء صحیح را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{cases} -۱<x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \\ -۱<x<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} ۰<x^{۲}<۱ \Rightarrow [x^{۲}]=۰ \\ -۱<x<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم}} -۱<x^{۳}<۰ \Rightarrow [x^{۳}]=-۱ \\ -۱<x<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۴ می‌رسانیم}} ۰<x^{۴}<۱ \Rightarrow [x^{۴}]=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x]+[x^{۲}]+[x^{۳}]+[x^{۴}]=(-۱)+۰+(-۱)+۰=-۲$$

۳ - گزینه ۲ چون $[x^{۲}]=۰$ است $۰ \le x^{۲}<۱$ همچنین باتوجه به عبارت مفروض مقدار x مثبت است (زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج باید نامنفی باشد) پس $۰ \le x<۱$ می‌باشد. خواهیم داشت:

$$\sqrt{x^{۲}-۲x\sqrt{x}+x}=\sqrt{(x-\sqrt{x})^{۲}}=|x-\sqrt{x}|=\sqrt{x}-x$$
$$\sqrt{۱+x-۲\sqrt{x}}=\sqrt{(۱-\sqrt{x})^{۲}}=|۱-\sqrt{x}|=۱-\sqrt{x}$$

مجموع دو عبارت برابر $۱-x$ می‌باشد.

۴ - گزینه ۱ برای حل، ابتدا عبارت درون براکت را تفکیک می‌کنیم:

$$\left[\frac{۲x-۱}{x}\right]=۳ \Rightarrow \left[۲-\frac{۱}{x}\right]=۳$$

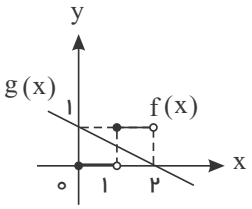
می‌توان عدد صحیح را به خارج براکت منتقل کرد، در نتیجه داریم:

$$۲+\left[-\frac{۱}{x}\right]=۳ \Rightarrow \left[-\frac{۱}{x}\right]=۱ \Rightarrow ۱ \le -\frac{۱}{x}<۲ \Rightarrow -۲<\frac{۱}{x} \le -۱ \Rightarrow -۱ \le x<-\frac{۱}{۲}$$

۵ - گزینه ۴ حاصل براکت عددی صحیح مانند k است.

$$[x]=۴x \Rightarrow ۴x=k\ ,\ k \in \mathbb{Z} \to x=\frac{k}{۴} \Rightarrow [x]=k$$
$$k \le x<k+۱ \Rightarrow k \le \frac{k}{۴}<k+۱ \Rightarrow k \le \frac{k}{۴} \Rightarrow ۴k \le k$$
$$\Rightarrow ۳k \le ۰ \Rightarrow k \le ۰ \quad (۱)\ ,\quad \frac{k}{۴}<k+۱ \Rightarrow k<۴k+۴$$
$$-۴<۳k \Rightarrow k>-\frac{۴}{۳} \quad (۲) \quad \Rightarrow (۱) \cap (۲) \Rightarrow -\frac{۴}{۳}<k \le ۰ \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}}$$
$$\left.\begin{array}{l} k=-۱ \Rightarrow x=\frac{k}{۴}=-\frac{۱}{۴} \\ k=۰ \Rightarrow x=\frac{k}{۴}=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{معادله ۲ ریشه دارد}$$

۶ - گزینه ۱ معادله را به فرم $[x]=-\frac{۱}{۲}x+۱$ بازنویسی می‌کنیم. نمودارهای توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=-\frac{۱}{۲}x+۱$ را رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر، f و g نقطهٔ تقاطعی ندارند و در نتیجه معادله جواب ندارد.



۷ - گزینه ۳

می‌دانیم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

در اغلب معادلات شامل $[-x]$ می‌توانیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$if: x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]=-x$

$if:\ x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]-۱$

اگر x صحیح باشد $\Rightarrow ۳x-۲x=۶\Rightarrow x=۶$ ق ق $\qquad (I)$

اگر x غیرصحیح باشد $\Rightarrow ۳[x]+۲(-[x]-۱)=۶\Rightarrow[x]=۸\xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}}۸<x<۹\qquad (II)$

$I\cup II\Rightarrow\{۶\}\cup(۸,۹)\Rightarrow a=۸\ ,\ b=۹\ ,\ c=۶\Rightarrow a+b-c=۱۱$

۸ - گزینه ۴

$$\frac{۱۷}{۳}<[x]<\frac{۱۳}{۲}\Rightarrow ۵٫۶۶<[x]<۶٫۵$$

با توجه به اینکه حاصل $[x]$ عددی صحیح می باشد، تنها عدد صحیحی که در نامساوی فوق صدق می کند عدد ۶ می‌باشد.

$۵٫۶۶<[x]<۶٫۵\Rightarrow[x]=۶\Rightarrow ۶\le x<۷\Rightarrow -۱۲\ge -۲x>-۱۴$

$\Rightarrow -۱۴<-۲x\le -۱۲\Rightarrow[-۲x]=-۱۴,-۱۳,-۱۲$

۹ - گزینه ۳ تساوی $[\sqrt{x}]^۲=x$ نشان می‌دهد که x عددی صحیح و مربع کامل است. اعدادی که در بازه‌ی $(۱,۱۳۹۳]$ مربع کامل‌اند به شرح زیرند.

$$۱^۲,۲^۲,۳^۲,۴^۲,\cdots,۳۶^۲,\underbrace{۳۷^۲}_{۱۳۶۹}$$

بنابراین تعداد جواب‌ها ۳۷ تا است.

۱۰ - گزینه ۲

عدد صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می‌آید و می‌دانیم اگر $[x]=n$ باشد $(n\in\mathbb{Z})$ آنگاه $n\le n<n+۱$ است.

$[|x|+۱]=۱\Rightarrow[|x|]+۱=۱\Rightarrow[|x|]=۰\Rightarrow ۰\le|x|<۱$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}|x|\ge ۰\Rightarrow \text{همواره برقرار است}\\ |x|<۱\Rightarrow -۱<x<۱\end{array}\right\}\Rightarrow \text{جواب}=(-۱,۱)\Rightarrow a=-۱\ ,\ b=۱$$

$\Rightarrow b-a=۱-(-۱)=۲$

۱۱ - گزینه ۴ می‌دانیم:

$if: x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]$

$if: x\notin ۰\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-۱-[x]$

در این تست با استفاده از تغییر متغیر داریم:

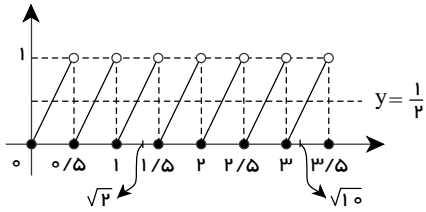
$$\frac{۲x-۱}{۲}=A\Rightarrow[A]-[-A]=۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A\in Z\Rightarrow ۲A=۳\Rightarrow A=\frac{۳}{۲}\notin Z\\ A\notin Z\Rightarrow[A]-(-[A]-۱)=۳\Rightarrow ۲[A]=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow[A]=۱\xrightarrow{A\notin Z}۱<A<۲\Rightarrow ۱<\frac{۲x-۱}{۲}<۲\Rightarrow\frac{۳}{۲}<x<\frac{۵}{۲}$$

۱۲ - گزینه ۱

$$۲x-[۲x]=\frac{۱}{۲}$$



$$f(\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}-[۲\sqrt{۲}]=۲٫۸-۲=۰٫۸>۰٫۵$$

$$f(\sqrt{۱۰})=۲\sqrt{۱۰}-[۲\sqrt{۱۰}]\approx ۶٫۲-۶=۰٫۲<۰٫۵$$

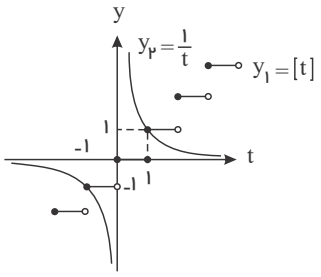
پس سه نقطه‌ی برخورد وجود دارد.

به توابع $a_x-[a_x]$ به خاطر شکل خاصشان دندان اره‌ای می گویند که در هر دوره تناوبشان که $T=\frac{۱}{|a|}$ می‌باشد رسم می‌شود. با توجه به شکل رسم شده خط افقی $y=\frac{۱}{۲}$ نمودار تابع

$y = ۲x - [۲x]$ را در بازه $[\sqrt{۲}, \sqrt{۱۵}]$، ۳ مرتبه قطع می‌کند.

۱۳ - گزینه ۳ فرض کنید $x^۲ - ۱ = t$ باشد. در این صورت $t\,[t] = ۱$ است. یعنی $[t] = \frac{۱}{t}$ با شرط $t \neq ۰$.

نمودار توابع $y_۱ = [t]$ و $y_۲ = \frac{۱}{t}$ را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل، نمودار دو تابع تنها در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱− با هم برخورد می‌کنند.

$$t = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$

$$t = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۱ = -۱ \Rightarrow x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

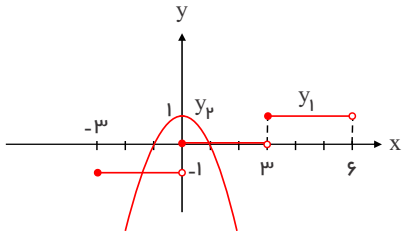
پس تعداد ریشه‌های معادله ۳ تاست.

۱۴ - گزینه ۳ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^۲ + [\frac{x}{۳}] = ۱ \Rightarrow [\frac{x}{۳}] = ۱ - x^۲$$

حالا نمودار دو تابع $y_۱ = [\frac{x}{۳}]$ و $y_۲ = ۱ - x^۲$ را رسم می‌کنیم:

$$y_۱ = [\frac{x}{۳}] = \begin{cases} \vdots & \\ ۱ & ۳ \leq x < ۶ \quad \Rightarrow ۱ \leq \frac{x}{۳} < ۲ \\ ۰ & ۰ \leq x < ۳ \quad \Rightarrow ۰ \leq \frac{x}{۳} < ۱ \\ -۱ & -۳ \leq x < ۰ \quad \Rightarrow -۱ \leq \frac{x}{۳} < ۰ \\ \vdots & \end{cases}$$



دو تابع در دو نقطه متقاطع‌اند پس معادله ۲ جواب دارد.