پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\boxed{\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}}$$

$$-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۰<\frac{\pi}{۴}-x<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۴}-x)>۰\Rightarrow \frac{۱-m}{۲+m}>۰\Rightarrow -۲<m<۱$$

		-۲		۱	
$۱-m$	$+$		$+$	۰	$-$
$۲+m$	$-$	۰	$+$		$+$
	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

۲ ـ گزینه ۴

می‌دانیم $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow \tan(۴۵^\circ-\alpha)=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}$

$$\frac{۱-\tan ۱۵}{۱+\tan ۱۵}=\tan(۴۵-۱۵)=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۳ ـ گزینه ۲

ابتدا مقدار $\cos\alpha$ **و** $\sin\beta$ **را حساب می‌کنیم:**

$$\sin\alpha=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}\quad \text{و}\quad \cos\beta=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sin\beta=\sqrt{۱-\frac{۱}{۹}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{-۲}{۹}+\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۹}=\frac{۲}{۹}(\sqrt{۱۰}-۱)$$

$$(۱+\sqrt{۱۰})\cdot\sin(\alpha+\beta)=(۱+\sqrt{۱۰})\times\frac{۲}{۹}(\sqrt{۱۰}-۱)=\frac{۲}{۹}(۱۰-۱)=۲\quad \text{پس}$$

۴ ـ گزینه ۱

می‌دانیم $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\sin^۲\alpha-\sin^۲\beta$ **پس:**

$$A=\frac{\sin^۲ ۷x-\sin^۲ ۲x}{\sin ۵x}=\frac{\sin(۷x+۲x)\sin(۷x-۲x)}{\sin ۵x}=\sin ۹x$$

$$x=\frac{\pi}{۵۴}\Rightarrow A=\sin(۹\times\frac{\pi}{۵۴})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۵ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{۱-\tan a\cdot\tan b}$

$$x+y=\frac{\pi}{۴}\to\tan(x+y)=۱$$

$$\cos(x-y)=\frac{۳}{۵}\to\sin^۲(x-y)+\cos^۲(x-y)=۱$$

$$\to\sin^۲(x-y)+\frac{۹}{۲۵}=۱\to\sin(x-y)=\pm\frac{۴}{۵}$$

$$\tan(x-y)=\frac{\pm\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}}=\pm\frac{۴}{۳}$$

$$\tan ۲x=\tan((x+y)+(x-y))=\frac{\tan(x+y)+\tan(x-y)}{۱-\tan(x+y)\times\tan(x-y)}$$

$$=\frac{۱\pm\frac{۴}{۳}}{۱-(۱)\left(\pm\frac{۴}{۳}\right)}=\begin{cases}\dfrac{۱+\frac{۴}{۳}}{۱-\frac{۴}{۳}}=-۷\\[2ex]\dfrac{۱-\frac{۴}{۳}}{۱+\frac{۴}{۳}}=-\dfrac{۱}{۷}\end{cases}\quad\to\quad\cot ۲x=\begin{cases}\frac{-۱}{۷}\\ -۷\end{cases}$$

۶ - گزینه ۳

نکته: $\sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin(x + ۴۵^\circ)$

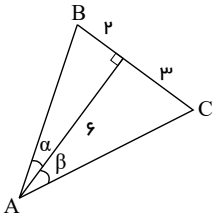
$$A = \sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} + \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$B = \sqrt{۲\tan x + ۲\cot x} = \sqrt{۲\frac{\sin x}{\cos x} + ۲\frac{\cos x}{\sin x}} = \sqrt{\frac{۲\sin^۲ x + ۲\cos^۲ x}{\sin x \cos x}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}}{\dfrac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\sin x \cos x}}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}\sin(x + ۴۵^\circ)}{\sqrt{۲}} = \sin(x + ۴۵^\circ)$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده، به‌ازای $x = ۱۰^\circ$، برابر $\sin ۵۵^\circ$ خواهد بود.

۷ - گزینه ۲



$$\Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} \\ \tan\beta = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

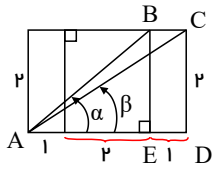
$$\Rightarrow \tan\hat{A} = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۶}} = ۱$$

$$\tan\hat{A} = ۱ \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{۴}$$

۸ - گزینه ۲

$$A = \frac{\sin(۲۰^\circ + ۵۰^\circ)}{-\cos(۴۰^\circ + ۱۰^\circ)} = \frac{\sin ۷۰^\circ}{-\cos ۵۰^\circ} = \frac{\cos ۲۰^\circ}{-\sin ۴۰^\circ} = \frac{\cos ۲۰^\circ}{-۲\sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ} = \frac{-۱}{۲\sin ۲۰^\circ}$$

۹ - گزینه ۱



$$\overset{\Delta}{ABE} : AB^۲ = ۲^۲ + ۳^۲ = ۴ + ۹ = ۱۳ \to AB = \sqrt{۱۳}$$

$$\overset{\Delta}{ACD} : AC^۲ = ۲^۲ + ۴^۲ = ۴ + ۱۶ = ۲۰ \to AC = \sqrt{۲۰}$$

$$\overset{\Delta}{ABE} : \cos\alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\overset{\Delta}{ACD} : \cos\beta = \frac{AD}{AC} = \frac{۴}{\sqrt{۲۰}} \quad , \quad \sin\beta = \frac{CD}{AC} = \frac{۲}{\sqrt{۲۰}}$$

$$\cos x = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}} \times \frac{۴}{\sqrt{۲۰}} + \frac{۲}{\sqrt{۱۳}} \times \frac{۲}{\sqrt{۲۰}}$$

$$= \frac{۱۲ + ۴}{\sqrt{۱۳} \times ۲\sqrt{۵}} = \frac{۸}{\sqrt{۶۵}}$$

۱۰ - گزینه ۳

$$\tan ۱۵^\circ + \tan ۶۰^\circ = \frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ} + \frac{\sin ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ}$$

$$= \frac{\sin ۱۵^\circ \cos ۶۰^\circ + \sin ۶۰^\circ \cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ \cos ۶۰^\circ} = \frac{\sin(۱۵^\circ + ۶۰^\circ)}{\cos ۱۵^\circ \cos ۶۰^\circ}$$

$$= \frac{\sin 75^\circ}{\cos 15^\circ \cos 60^\circ} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

توجه: چون زوایای 15° و 75° متمم یکدیگر هستند، پس:

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$$

۱۱ - گزینه ۳ روش اول: با توجه به رابطه ی $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ ، داریم:

$$\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5 - 5\tan\alpha = 1 + \tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - (\frac{2}{3})^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 2/4$$

۱۲ - گزینه ۳

فرض کنید: $20^\circ + \alpha = x \Rightarrow \sin x = \frac{12}{13}$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{144}{169} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{5}{13}$$

x در ناحیهٔ اول است، پس $\cos x = \frac{5}{13}$ می‌باشد.

$$\cos(80^\circ + \alpha) = \cos(60^\circ + \overbrace{20^\circ + \alpha}^{x}) = \cos(60^\circ + x)$$

$$= \cos 60^\circ \cos x - \sin 60^\circ \sin x = \frac{1}{2}(\frac{5}{13}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{12}{13}) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$$

۱۳ - گزینه ۴ از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y) = 1 \Rightarrow (-\frac{3}{5})^2 + \cos^2(x+y) = 1$$

$$\Rightarrow cos^2(x+y) = \frac{16}{25} \xrightarrow{\pi < x+y < \frac{3\pi}{2}} \cos(x+y) = -\frac{4}{5}$$

از طرفی:

$$\cos 2y = \cos((x+y) - (x-y)) = \cos(x+y)\cos(x-y) + \sin(x+y)\sin(x-y)$$

$$= (-\frac{4}{5})(\frac{1}{2}) + (-\frac{3}{5})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$$

۱۴ - گزینه ۳ در عبارت مقابل به‌جای $\sqrt{3}$، تانژانت 60° یا کتانژانت 30° را قرار می‌دهیم و داریم:

$$\sin 75^\circ + \sqrt{3}\sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) + \tan 60^\circ \sin 15^\circ = \cos 15^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\sin 15^\circ$$

$$= \frac{\cos 60^\circ \cos 15^\circ + \sin 60^\circ \sin 15^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\cos(60^\circ - 15^\circ)}{\frac{1}{2}} = 2\cos 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

۱۵ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$

از رابطهٔ داده شده $\tan(\alpha + 20^\circ)$ را می‌توان محاسبه نمود.

$$\tan\alpha + \tan 20^\circ + 3\tan\alpha \cdot \tan 20^\circ = 3 \Rightarrow \tan\alpha + \tan 20^\circ = 3 - 3\tan\alpha \cdot \tan 20^\circ$$

$$\tan\alpha + \tan 20^\circ = 3(1 - \tan\alpha \cdot \tan 20^\circ) \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan 20^\circ}{1 - \tan\alpha \cdot \tan 20^\circ} = 3 \Rightarrow \tan(\alpha + 20^\circ) = 3$$

حال به کمک $\tan(\alpha + 20^\circ) = 3$ حاصل $\cot(25^\circ - \alpha)$ را پیدا می‌کنیم.

چون $(25^\circ - \alpha) + (\alpha + 20^\circ) = 45^\circ$ از طرفین تانژانت می‌گیریم:

$$\tan\big((25^\circ - \alpha) + (\alpha + 20^\circ)\big) = \tan 45^\circ \Rightarrow \frac{\tan(25^\circ - \alpha) + 3}{1 - 3\tan(25^\circ - \alpha)} = 1$$

$$\Rightarrow \tan(۲۵^\circ - \alpha) + ۳ = ۱ - ۳\tan(۲۵^\circ - \alpha) \Rightarrow \tan(۲۵^\circ - \alpha) = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cot(۲۵^\circ - \alpha) = -۲$$