

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-3} + \sqrt{4(2x-3)} &= x+1 \Rightarrow 3\sqrt{2x-3} = x+1 \\ \Rightarrow 9(2x-3) &= x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 16x + 28 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 3\sqrt{4-3} = 2+1 \rightarrow 3=3 \\ x=14 \rightarrow 3\sqrt{28-3} = 14+1 \rightarrow 15=15 \end{cases}\end{aligned}$$

هر دو جواب قابل قبول اند. چون در معادله صدق می کنند.

۲ - گزینه ۲

$$\begin{aligned}\sqrt{x+3} &= 1 + \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+3 = 1+x-1+2\sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{3}{2} = \sqrt{x-1} \\ \Rightarrow \frac{9}{4} &= x-1 \Rightarrow x=1+\frac{9}{4} = 3,25\end{aligned}$$

۳ - گزینه ۴

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2 + 4a = 4 + 9a^2 - 12a \rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0.$$

$$\begin{aligned}\Delta = b^2 - 4ac = 256 - 112 = 144 &\rightarrow \begin{cases} a = \frac{16+12}{14} = 2 \text{ (در معادله صدق نمی کند)} \\ a = \frac{16-12}{14} = \frac{2}{7} \text{ قق} \end{cases} \\ \text{پس: } \frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7}+1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4,5\end{aligned}$$

۴ - گزینه ۲

$$\begin{aligned}\sqrt{4x+8} + \sqrt{4x-16} &= A \\ \rightarrow (\sqrt{4x+8} + \sqrt{4x-16})(\sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16}) &= (\sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16})A \\ \rightarrow (4x+8) - (4x-16) &= 3A \\ 24 = 3A \rightarrow A &= 8\end{aligned}$$

۵ - گزینه ۴

$$\begin{aligned}(x - \sqrt{x})^2 &= 4(x - \sqrt{x}) - 3, \quad x - \sqrt{x} = t \Rightarrow t^2 = 4t - 3 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \\ \Rightarrow (t-1)(t-3) &= 0 \Rightarrow t=1, t=3 \\ x - \sqrt{x} = 1, \quad \sqrt{x} = a \Rightarrow a^2 - a - 1 &= 0 \Rightarrow \Delta = 5 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad a > 0 \rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ x - \sqrt{x} = 3, \quad \sqrt{x} = a \Rightarrow a^2 - a - 3 &= 0 \Rightarrow \Delta = 13 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \quad a > 0 \rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x &= \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^2\end{aligned}$$

معادله ۲ ریشه دارد.

$$\frac{3}{2\sqrt{x}-5} + \frac{77}{2\sqrt{x}+5} = 10 \Rightarrow \frac{6\sqrt{x}+15+154\sqrt{x}-385}{(2\sqrt{x}-5)(2\sqrt{x}+5)} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{160\sqrt{x}-370}{4x-25} = 10 \Rightarrow 160\sqrt{x}-370 = 40x-250 \Rightarrow 160\sqrt{x} = 40x+120$$

$$\div 40 \Rightarrow 4\sqrt{x} = x+3$$

با فرض $\sqrt{x} = t$ داریم:

$$4t = t^2 + 3 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1, t = 3$$

معادله ۲ ریشه دارد. \Rightarrow قابل قبول $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$, قابل قبول $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

۷ - گزینه ۱ با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x-2 = t \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 4x + 4 = t^2 \Rightarrow x^2 - 4x - 3 = t^2 - 7$$

$$\frac{3}{x-2} = \frac{\sqrt{x^2-4x-3}}{4} \Rightarrow \frac{3}{t} = \frac{\sqrt{t^2-7}}{4} \Rightarrow t\sqrt{t^2-7} = 12 \Rightarrow t^2(t^2-7) = 144$$

$$\Rightarrow t^4 - 7t^2 - 144 = 0 \Rightarrow (t^2-16)(t^2+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t^2 = -9 \\ t^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow t = \pm 4$$

با توجه به معادله $t\sqrt{t^2-7} = 12$ مقدار $t = -4$ نیز غیر قابل قبول است پس داریم:

$$t = 4 \Rightarrow x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6$$

معادله یک جواب دارد.

۸ - گزینه ۱

$$\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{x+\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2x}{x^2-x} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2x}{x(x-1)} = \frac{2}{3} \xrightarrow{x \neq 0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow x-1 = 3 \Rightarrow x = 4$$

حال $x = 4$ در معادله اصلی امتحان می کنیم:

$$\frac{1}{4-2} + \frac{1}{4+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

معادله تنها ریشه $x = 4$ را دارد.۹ - گزینه ۲ با استفاده از تغییر متغیر $x^2 + 4x + 5 = t$ داریم:

$$x^2 + 4x + 5 - 2 = \sqrt{x^2 + 4x + 5} \Rightarrow t - 2 = \sqrt{t} \quad (I)$$

چون عبارت سمت راست همواره مثبت است باید عبارت سمت چپ هم همواره مثبت باشد.

$$t - 2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$$

حال طرفین عبارت I را به توان ۲ می رسانیم.

$$(t-2)^2 = (\sqrt{t})^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow \text{است پس غیر قابل قبول است} \\ t \geq 2 \rightarrow \text{با توجه به اینکه} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{c}{a} = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 5 = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0 \end{cases}$$

$$\text{حاصلضرب ریشه ها: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

۱۰ - گزینه ۲ طرفین معادله را به توان ۲ می رسانیم:

$$\sqrt{x+3} - x = 1 + 1 - x + 2\sqrt{1-x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = 2 + 2\sqrt{1-x} \Rightarrow x+3 = 4 + 4 - 4x + 8\sqrt{1-x}$$

$$\Rightarrow 5x - 5 = 8\sqrt{1-x} \Rightarrow 25(x-1)^2 = 64(1-x) \Rightarrow 25(x-1)^2 + 64(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(25x-25+64) = 0 \Rightarrow (x-1)(25x+39) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{39}{25} \end{cases}$$

جواب $x = -\frac{39}{25}$ در معادله صدق نمی کند و معادله دارای یک جواب $x = 1$ است.