

## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ دو ضلع مجاور یک مربع برهم عمودند، پس شیب آن‌ها را به دست آورده و حاصل ضربشان را مساوی ۱- قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} mx + 2y = 3 \rightarrow \text{شیب} = -\frac{m}{2} \\ x + (m+1)y = 1 \rightarrow \text{شیب} = -\frac{1}{m+1} \end{cases}$$

$$\text{دو خط برهم عمودند} \rightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)\left(-\frac{1}{m+1}\right) = -1 \rightarrow \frac{m}{2m+2} = -1 \rightarrow 2m+2 = -m$$

$$\rightarrow 3m = -2 \rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

۲ - گزینه ۳ برای پیدا کردن نقطه‌ی ثابت دسته خطوط کافی است به  $m$  دو مقدار مختلف داده و با دو خط به دست آمده تشکیل دستگاه دهیم و  $x, y$  را پیدا کنیم.

$$m = -1 \rightarrow -3y - 2 + 5 = 0 \rightarrow y = 1$$

$$m = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}x + 1 + 5 = 0 \rightarrow x = -4$$

$$A \left| \begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix} \right| \rightarrow A \left| \begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix} \right|_1 = 0 \rightarrow AO = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

۳ - گزینه ۴ شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادله‌ی خط سوم صدق کند.

$$\begin{cases} y + 2x = 0 \\ y + 3x = a \end{cases} \Rightarrow x = a, y = -2a$$

$$A \left| \begin{smallmatrix} a \\ -2a \end{smallmatrix} \right| \xrightarrow{\text{صدق در خط سوم}} -4a + a^2 + 5 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 5 = 0$$

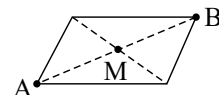
این سه خط هیچگاه متقارب نیستند.  $\rightarrow$  ریشه‌ی حقیقی ندارد  $\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$

۴ - گزینه ۳

مختصات نقطه‌ی  $A$  در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه  $A$  روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا

مختصات نقطه‌ی  $B$  بدست آید.

$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B \left| \begin{smallmatrix} -1 \\ 4 \end{smallmatrix} \right|$$



می‌دانیم نقطه‌ی  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  قرار دارد یعنی:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7-1}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$$

۵ - گزینه ۲ باید شیب دو خط قرینه و معکوس هم باشد از طرفی محل برخورد در ناحیه‌ی چهارم است:

$$\frac{m}{m+1} = \frac{2m-1}{2} \Rightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.  $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right|$

$$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -8 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow B \left| \begin{smallmatrix} 13 \\ 4 \\ 19 \\ 4 \end{smallmatrix} \right|$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها  $m$  در فاصله‌ی  $2 < m < 0$  قرار دارد.

۶ - گزینه ۲ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی  $A \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right|$  و  $B \left| \begin{smallmatrix} 8 \\ 3 \end{smallmatrix} \right|$  را بدست می‌آوریم.

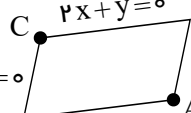
$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 - 3}{2 - 8} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{دسته خط}} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{\text{دسته خط}} = -\frac{2k}{k+1} = -\frac{3}{2} \rightarrow 4k = 3k + 3 \rightarrow k = 3$$

$$k = 3 \xrightarrow{\text{معادله دسته خطوط}} 4y + 6x - 2 = 0 \rightarrow 2y + 3x = 1$$

۷ - گزینه ۳

$$2x + y = 1 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, 2y - 3x + 5 = 0 \rightarrow m' = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 2y - 3x + 5 = 0 \end{array}$$


دو ضلع داده شده چون دارای شیب‌های برابر نیستند باهم موازی نمی‌باشند و نقطه‌ی داده شده در معادلات دو ضلع داده شده صدق نمی‌کند پس این نقطه روی این دو ضلع قرار ندارد پس می‌توان چنین شکلی را تصور کرد.

برای پیدا کردن رأس  $C$  کافی است محل تلاقی دو ضلع داده شده را بدست آوریم.

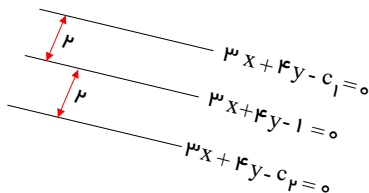
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2y - 3x + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 1, y = -1 \rightarrow C \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$M \text{ وسط } AC \begin{vmatrix} \frac{3+1}{2} = -1 \\ \frac{-3+(-1)}{2} = -2 \end{vmatrix}$$

محل برخورد دو قطر وسط  $AC$  قرار دارد یعنی:

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

۸ - گزینه ۲



مطابق شکل، دو خط موازی با خط  $3x + 4y - 1 = 0$  وجود دارند که به فاصله‌ی ۲ از آن می‌باشند که می‌توانیم معادلات آن‌ها را به صورت  $3x + 4y - c = 0$  نشان دهیم.

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 1 = 0 & \xrightarrow{\text{فاصله}} d = \frac{|-1 + c|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-1 + c|}{5} = 2 \rightarrow |-1 + c| = 10 \\ 3x + 4y - c = 0 & \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -1 + c = 10 \rightarrow c = 11 \rightarrow 3x + 4y - 11 = 0 \xrightarrow{x=0} y = \frac{11}{4} = 2,75 \\ -1 + c = -10 \rightarrow c = -9 \rightarrow 3x + 4y + 9 = 0 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{9}{4} = -2,25 \end{cases}$$

توجه کنید فاصله‌ی بین دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  از رابطه‌ی  $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.

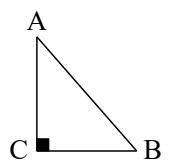
۹ - گزینه ۱

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{m - 1 + 2}{m - 1} = \frac{m + 1}{m - 1}$$

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-4 + 2}{5 - 1} = \frac{-1}{2}$$

$$\xrightarrow{BC \perp AC} m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$$

عمود است



چون ضلع  $AC$  بر ضلع  $BC$  عمود است بنابراین حاصل ضرب شیب‌هایشان  $-1$  می‌باشد.

$$\Rightarrow \frac{-m - 1}{2m - 2} = -1 \rightarrow -m - 1 = -2m + 2 \rightarrow m = 3$$

$$\begin{aligned} \text{وتر } AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(m - 5)^2 + (m - 1 + 4)^2} \\ &= \sqrt{(m - 5)^2 + (m + 3)^2} \xrightarrow{m=3} \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

۱۰ - گزینه ۲ اگر دو خط  $2y - 8x + 6 = 0$  و  $12x - 3y = m$  دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع باشند، آن‌گاه دو خط با هم موازی هستند، یعنی باید شیب خط مساوی و عرض از مبدأ نامساوی داشته باشند:

$$2y - 8x + 6 = 0 \rightarrow 2y = 8x - 6 \rightarrow y = 4x - 3$$

$$12x - 3y = m \rightarrow 3y = 12x - m \rightarrow y = 4x - \frac{m}{3}$$

$$\rightarrow -3 \neq -\frac{m}{3} \rightarrow m \neq 9 \rightarrow m \in \mathbb{R} - \{9\}$$

۱۱ - گزینه ۲ قطرهای مربع بر هم عمودند پس شیب قطرهای عکس و قرینه هم هستند.

$$\begin{aligned} y &= (k + 2)x + 3 \rightarrow m = k + 2 \xrightarrow{\text{شرط عمود بودن}} \frac{k + 2}{k} = -1 \rightarrow k + 2 = -k = -1 \\ ky - x - 5 &= 0 \rightarrow m' = \frac{1}{k} \xrightarrow{mm' = -1} \frac{1}{k} = -1 \end{aligned}$$

حال با معلوم بودن  $k$ ، معادلات دو خط را نوشته و آنها را با هم تلاقی می‌دهیم.

$$k = -1 \rightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ -y - x - 5 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x = -4, \quad y = -1$$

$$A \left| \begin{smallmatrix} -4 \\ -1 \end{smallmatrix} \right|, O \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right| \rightarrow AO = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$