

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ اگر بهروز بتواند به تنهایی این کار را در k ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به تنهایی در $k + 9$ ساعت انجام می دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k \cdot (k+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 + 9k = 40k + 180 \Rightarrow k^2 - 31k - 180 = 0 \rightarrow (k-36)(k+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} k=36 \\ k=-5 \end{cases} \text{ غ ق}$$

۲ - گزینه ۲ در طرف چپ تساوی مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{m}{x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+4}{x^2-x-2} \Rightarrow \frac{mx+m+x^2-2x}{x^2-x-2} = \frac{2x+4}{x^2-x-2}$$

$$\xrightarrow{x \neq -1, 2} mx+m+x^2-2x=2x+4 \Rightarrow x^2+(m-4)x+(m-4)=0 \quad (*)$$

اگر ریشه های معادله را α و β در نظر بگیریم، با توجه به این که یک ریشه معادله از قرینه ریشه دیگر یک واحد بیش تر است، داریم:

$$\alpha = -\beta + 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \quad (**)$$

با توجه به معادله $(*)$ جمع ریشه ها برابر است با:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{m-4}{1} \xrightarrow{(**)} -\frac{m-4}{1} = 1 \Rightarrow m=3$$

۳ - گزینه ۳

$$x^2 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2(x + \frac{1}{x}) - 1 = 0$$

با فرض $x + \frac{1}{x} = t$ داریم:

$$x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$t^2 - 2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) = 0 \Rightarrow t=3, t=-1$$

$$t=-1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + 1 = -x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

معادله فوق ریشه ندارد.

$$t=3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4 = 5 > 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$$

مجموع ریشه ها

۴ - گزینه ۱ از آنجایی که $x^2 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ ، کافیسٹ طرفین تساوی را در $x^2 - 8$ ضرب کنیم. لذا تساوی به شکل زیر درمی آید:

$$3x^2 - x + 2 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + 1)(x - 2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x + 2 = (A+B)x^2 + (2A-2B+1)x + 4A-2$$

حال با مقایسه ضرایب نتیجه می گیریم:

$$\begin{cases} 4A-2=2 \\ A+B=3 \\ 2A-2B+1=-1 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=2$$

بنابراین:

$$B-A=2-1=1$$

۵ - گزینه ۴ با تجزیه ی مخرج ها داریم:

$$\frac{3}{(x+2)(x-1)} + \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{2(x-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{3(x-2) + (x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2(x-2)} \Rightarrow \frac{x^2+3x-7}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2+6x-14 = x^2+x-2 \Rightarrow x^2+5x-12=0$$

حال دقت کنید هیچ کدام از جواب های مخرج در معادله ی اخیر صدق نمی کند. لذا هر دو جواب $x^2+5x-12=0$ قابل قبول هستند که حاصلضرب آنها نیز $\frac{c}{a}$ برابر -12 است.

۶ - گزینه ۱ با تجزیه ی مخرج ها و بعد از آن با مخرج مشترک گیری، معادله را حل می کنیم:

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} + \frac{x-2}{(x+2)(x-1)} = \frac{6x}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{(2x-1)(x+2) + (x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{6x}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{x \neq -1, -2, 1}{x-1} \Rightarrow \frac{2x^2 + 3x - 2 + x^2 - x - 2}{x-1} = 6x \Rightarrow 3x^2 + 2x - 4 = 6x(x-1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 4 = 6x^2 - 6x \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm 4}{6} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{3}$$

پس ریشه کوچک تر این معادله، $x = \frac{2}{3}$ است.

۷ - گزینه ۳ می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v در نظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب $100 + v$ و در خلاف جهت حرکت آب $100 - v$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1200}{100+v} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1200}{100-v} \end{cases} \rightarrow t_2 - t_1 = 5 \rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

$$\rightarrow \frac{1200(100+v) - 1200(100-v)}{(100-v)(100+v)} = 5 \rightarrow \frac{120000 + 1200v - 120000 + 1200v}{10000 - v^2} = 5$$

$$\rightarrow 2400v = 5(10000 - v^2) \rightarrow 480v = 10000 - v^2$$

$$\rightarrow v^2 + 480v - 10000 = 0 \rightarrow (v-20)(v+500) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} v = 20 \text{ قق} \\ v = -500 \text{ غق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v = 20$ برسید.

۸ - گزینه ۴ می‌دانیم که $x = Vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{V}$ است. اگر سرعت پرواز پرند را V در نظر بگیریم در این صورت سرعت رفت $V + 5$ و سرعت برگشت $V - 5$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1}{V+5} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1}{V-5} \end{cases} \rightarrow t_1 + t_2 = \underbrace{9}_{\text{دقیقه}} \rightarrow \frac{1}{V+5} + \frac{1}{V-5} = \underbrace{\frac{9}{60}}_{\text{ساعت}}$$

$$\rightarrow \frac{V-5+V+5}{(V+5)(V-5)} = \frac{3}{20} \rightarrow \frac{2V}{V^2-25} = \frac{3}{20} \rightarrow 3V^2 - 75 = 40V$$

$$\rightarrow 3V^2 - 40V - 75 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 1600 + 900 = 2500} \begin{cases} V_1 = \frac{40+50}{6} = 15 \text{ قق} \\ V_2 = \frac{40-50}{6} = \frac{-5}{3} \text{ غق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $V = 15$ برسید.

۹ - گزینه ۳

$$\text{میزان تکمیل پازل در یک ساعت} = t \Rightarrow \text{مدت زمان نازنین به تنهایی قبل از تمرین} = \frac{1}{t}$$

$$\text{میزان تکمیل پازل در یک ساعت} = t + 6 \Rightarrow \text{مدت زمان پدram به تنهایی قبل از تمرین} = \frac{1}{t+6}$$

حال پس از ۵ ماه تمرین داریم:

$$\text{سرعت نازنین} = \frac{3}{t}, \quad \text{سرعت پدرام} = \frac{2}{t+6}$$

$$\text{میزان تکمیل پازل در یک ساعت} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{مدت زمان هر دو باهم} = 4$$

$$\frac{3}{t} + \frac{2}{t+6} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4t(t+6)} 12(t+6) + 8t = t^2 + 6t$$

$$\Rightarrow 12t + 72 + 8t = t^2 + 6t \Rightarrow t^2 - 14t - 72 = 0 \Rightarrow (t-18)(t+4) = 0$$

$$\Rightarrow t = -4 \text{ غ قی } , \quad t = 18$$

۱۸ ساعت برای قبل از ۵ ماه تمرین است، پس در حال حاضر داریم:

$$\text{زمان نازنین} = \frac{t}{3} = \frac{18}{3} = 6, \quad \text{زمان پدرام} = \frac{t+6}{2} = \frac{18+6}{2} = 12$$

$$\text{اختلاف زمان هر دو نفر} = 12 - 6 = 6$$

۱۰ - گزینه ۱

$$\frac{3^x+1}{2-x^2} = 3^x \Rightarrow \frac{3^x+1}{3^x} = 2-x^2 \Rightarrow \frac{(3^x)^2+1}{3^x} = 2-x^2$$

$$3^x + \frac{1}{3^x} = 2 - x^2$$

اگر $f(x) = 3^x + \frac{1}{3^x}$ در نظر بگیریم ($3^x > 0$)، بنابراین $3^x + \frac{1}{3^x} \geq 2 \Leftrightarrow b + \frac{1}{b} \geq 2 \Leftrightarrow b > 0$ یعنی $\min\{f\} = 2$ و اگر $g(x) = 2 - x^2$ آن گاه $\max\{g\} = 2$ بنابراین $f(x) = g(x)$ زمانی جواب دارد که هر دو برابر با ۲ باشند، یعنی $x = 0$ بنابراین معادله فقط یک جواب دارد.