

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

مجموع n جمله اول

$$x^2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{\text{غیر نزولی}} x = -1, q = \frac{-1}{2}$$

$$S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{2 \left(1 - \left(\frac{-1}{2} \right)^6 \right)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{64} \right) \Rightarrow S_6 = \frac{4}{3} \times \frac{63}{64} = \frac{21}{16}$$

۲ - گزینه ۲

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

مجموع n جمله اول

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 3 \\ q &= \frac{-6}{3} = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_n = \frac{3(1 - (-2)^n)}{1 - (-2)} = 129 \Rightarrow 1 - (-2)^n = 129 \Rightarrow n = 7$$

۳ - گزینه ۲

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

مجموع n جمله اول

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 15 \\ q &= \frac{-15}{5} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_n = \frac{5(1 - (-3)^n)}{1 - (-3)} = 305 \Rightarrow \frac{5(1 - (-3)^n)}{4} = 305 \Rightarrow 1 - (-3)^n = 4 \times 61 \Rightarrow n = 5$$

۴ - گزینه ۴

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

مجموع n جمله اول

$$S_{10} = \frac{a(1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{a(1 - 2^{10})}{1 - 2} = 1023a = 5115 \Rightarrow a = 5$$

۵ - گزینه ۴

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

مجموع n جمله اول

$$\left. \begin{aligned} S_7 &= 136 \Rightarrow \frac{a(q^7 - 1)}{q - 1} = 136 \\ S_6 &= 153 \Rightarrow \frac{a(q^6 - 1)}{q - 1} = 153 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_6}{S_7} = \frac{\frac{a(q^6 - 1)}{q - 1}}{\frac{a(q^7 - 1)}{q - 1}} = \frac{153}{136}$$

$$\Rightarrow q^7 + 1 = \frac{153}{136} \Rightarrow q^7 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_5} = \frac{a}{aq^4} = 16$$

۶ - گزینه ۴

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = x \\ n = 11 \end{cases} \Rightarrow S_{11} = \frac{1(1-x^{11})}{1-x} \Rightarrow S = \frac{1(1-x^{11})}{1-x} \times \frac{1(1-(-x)^{11})}{1-(-x)} = \frac{1-x^{22}}{1-x^2} = \frac{1-2^{11}}{1-2}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -x \\ n = 11 \end{cases} \Rightarrow S_{11} = \frac{1(1-(-x)^{11})}{1-(-x)} \Rightarrow S = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$$

۷ - گزینه ۳ اگر بین دو عدد a و b عدد را طوری قرار دهیم که این $k+2$ عدد، تشکیل دنباله هندسی دهند، قدر نسبت این دنباله از رابطه $q^{k+1} = \frac{b}{a}$ یا $q^{k+1} = \frac{a}{b}$ به دست می آید. اگر جمله ی اول و ۲ و جمله ی هشتم $16\sqrt{2}$ باشد، در این صورت داریم:

$$q^{k+1} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = \frac{2^{\frac{9}{2}}}{2^1} = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow q^7 = 2^{\frac{7}{2}} = (\sqrt{2})^7 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

می دانیم مجموع n جمله ی اول یک دنباله هندسی با جمله ی اول a_1 و قدر نسبت q از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می آید، داریم:

$$S_8 = \frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}} \Rightarrow S_8 = \frac{2(16-1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{30}{\sqrt{2}-1}$$

با ضرب کردن مخرج و صورت در $(\sqrt{2}+1)$ و گویا کردن مخرج داریم:

$$S_8 = \frac{30}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{30(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 30(\sqrt{2}+1)$$

۸ - گزینه ۲

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{مجموع } n \text{ جمله اول}$$

$$S_8 = \frac{5}{4} S_7 \Rightarrow a_1 \frac{1-q^8}{1-q} = \frac{5}{4} a_1 \frac{1-q^7}{1-q} \Rightarrow 1+q^7 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^7 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^7 = \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = q^6 = (q^7)^{\frac{6}{7}} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{6}{7}} = \frac{1}{\lambda}$$

۹ - گزینه ۱

نکته: S_n دنباله هندسی بصورت مقابل است:

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$a_1 + a_7 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^6 = 1 \Rightarrow a_1(1+q^6) = 1 \quad (1)$$

$$S_7 = \frac{a_1(q^7-1)}{q-1} = 3 \Rightarrow \frac{a_1(q^7+1)(q^6-1)}{q-1} = 3 \xrightarrow{(1)} \frac{1 \times (q^6-1)}{q-1} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{(q-1)(q+1)}{q-1} = 3 \Rightarrow q+1=3 \Rightarrow q=2 \xrightarrow{(1)} a_1(1+2^6) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{63}$$

$$S_7 = \frac{a_1(q^7-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{63}(2^7-1)}{2-1} = \frac{1}{63}(63-1) = \frac{62}{63} = 12,6$$

۱۰ - گزینه ۲ تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{مجموع } n \text{ جمله اول}$$

$$\overbrace{a_1=1, q=x, s_9=?}^{a_1=1, q=-x, s_9=?} \quad \overbrace{a_1=1, q=-x, s_9=?}^{a_1=1, q=x, s_9=?}$$

$$(1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8) = \left(\frac{1 \times (1-x^9)}{1-x}\right) \left(\frac{1 \times (1-(-x)^9)}{1+(-x)}\right)$$

$$= \frac{(1-x^9)(1+x^9)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-(x^9)^2}{1-x^2} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} \frac{1-2^9}{1-2} = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$$

راه حل اول:

راه حل دوم:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) \Rightarrow x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots + 1) \Rightarrow x^{n-1} - x^{n-2} + \dots + 1 = \frac{x^n + 1}{x + 1}$$

$$\left(\frac{x^9 - 1}{x - 1}\right) \cdot \left(\frac{x^9 + 1}{x + 1}\right) = \frac{x^{18} - 1}{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{2})^{18} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1} = 512 - 1 = 511$$

۱۱ - گزینه ۱

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}, \quad \text{مجموع } n \text{ جمله اول } S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

نکته: در یک دنباله هندسی اگر $0 < q < 1$ باشد دنباله نزولی است.

$$\frac{a_7}{a_1} = q^6 \Rightarrow q^6 = \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{دنباله غیر نزولی است}} q = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S_7 = \frac{3(1 - (-\frac{1}{3})^7)}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3(1 - \frac{1}{729})}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \times \frac{728}{729} = \frac{182}{81}$$

۱۲ - گزینه ۲

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{مجموع } n \text{ جمله اول}$$

دنباله هندسی نزولی است بنابراین $0 < q < 1$ می باشد.

$$\frac{a(1 - q^8)}{1 - q} = 16 \quad (I)$$

$$\frac{a(1 - q^4)}{1 - q} = 17 \Rightarrow \frac{a(1 - q^8)}{1 - q} (1 + q^4) = 17 \Rightarrow 1 + q^4 = \frac{17}{16} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow q = +\frac{1}{4} \text{ قی } q = -\frac{1}{4} \text{ غی}$$

۱۳ - گزینه ۴ می دانیم جملات متوالی یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q ، به ترتیب عبارتند از: $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots, a_1 q^{n-1}, \dots$ بنابراین داریم:

$$\frac{a_1}{4} \cdot \frac{a_1 q}{a} \cdot \frac{a_1 q^2}{9} \cdot \frac{a_1 q^3}{b} \Rightarrow \frac{a_1 q^3}{a_1} = \frac{9}{4} \Rightarrow q^3 = \frac{9}{4}$$

همچنین می دانیم در یک دنباله هندسی با $a_1 > 0$ اگر $q > 1$ باشد، جملات دنباله صعودی هستند، بنابراین داریم:

$$q^3 = \frac{9}{4} \xrightarrow{q > 1} q = \frac{3}{2}$$

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت $(q \neq 1)$ از رابطه $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ به دست می آید. لذا داریم:

$$S_7 = \frac{4((\frac{3}{2})^7 - 1)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{665}{1} = 13 \frac{1}{8}$$

۱۴ - گزینه ۳ ابتدا مقادیر دنباله را بصورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ فرض می کنیم بنابراین جمع تمام جملات برابر است با:

$$S_{2n} = \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q}$$

وقتی بخواهیم فقط جمع ردیف های فرد را حساب کنیم باید بدانیم که تعداد جملات نصف می شود و چون یک در میان باید انتخاب کنیم قدر نسبت مربع می شود.

$$\text{جمع جملات مرتبه فرد} = \frac{a_1(1 - (q^2)^n)}{1 - q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q} = \frac{3a_1(1 - q^{2n})}{(1 - q) \cdot (1 + q)} \Rightarrow \frac{3}{1 + q} = 1 \Rightarrow q = 2$$

۱۵ - گزینه ۱ تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{مجموع } n \text{ جمله اول}$$

صورت کسر مجموع جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت t است که دوازده جمله دارد و مخرج کسر مجموع چهار جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت t^3 است.

$$t^{11} + t^{10} + \dots + 1 = 1 \times \frac{t^{12} - 1}{t - 1} \quad (a_1 = 1, q = t)$$

$$t^9 + t^6 + t^3 + 1 = 1 \times \frac{(t^3)^4 - 1}{t^3 - 1} \quad (a_1 = 1, q = t^3)$$

$$\frac{t^{11} + t^{10} + \dots + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1} = \frac{\frac{t^{12}-1}{t-1}}{\frac{t^{12}-1}{t^3-1}} = \frac{t^3-1}{t-1} = t^2 + t + 1$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = 2$$

$$t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{حال با قرار دادن}$$