پاسخنامه تشریحی

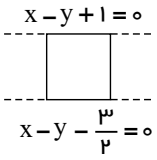
۱ - گزینه ۳ شیب هر دو خط $\sqrt{۳}$ می‌باشد پس با هم موازیند و می‌دانیم برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم (ضرایب x , y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند).

$$\begin{cases} y=\sqrt{۳}x+۲ \xrightarrow{\times\sqrt{۳}} ۳x-\sqrt{۳}y+۲\sqrt{۳}=۰ \\ \sqrt{۳}y-۳x+۶=۰ \to ۳x-\sqrt{۳}y-۶=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow d=\frac{|۲\sqrt{۳}-(-۶)|}{\sqrt{۹+۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}+۶}{\sqrt{۱۲}}=\frac{۲(\sqrt{۳}+۳)}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}+۳}{\sqrt{۳}}=۱+\frac{۳}{\sqrt{۳}}=۱+\sqrt{۳}$$

۲ - گزینه ۳

شیب هر دو خط یک می‌باشند یعنی این دو خط موازیند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصله‌ی بین این دو، ضلع مربع را می‌دهد.



(در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند)

$$\text{ضلع مربع}=d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱-(-\frac{۳}{۲})|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

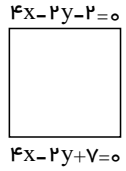
$$S_{\text{مربع}}=(\text{ضلع})^۲=(\frac{۵}{۲\sqrt{۲}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم.

۳ - گزینه ۲ چون گفته شده، دو ضلع مقابل پس این دو ضلع روبه‌روی هم هستند پس شیب دو خط داده‌شده با هم برابر است.

$$\begin{cases} y=۲x-۱ \to m=۲ \\ ۲y+kx=۷ \to m'=-\frac{k}{۲} \longrightarrow \frac{-k}{۲}=۲ \longrightarrow k=-۴ \end{cases}$$

بنابراین معادلات دو ضلع مربع به‌صورت $y=۲x-۱$ و $۲y-۴x=۷$ است (باید ضرایب x و y در هر دو معادلهٔ خط یکسان باشد پس معادلهٔ $y=۲x-۱$ را در ۲ ضرب می‌کنیم.)



$$\longrightarrow \text{ضلع مربع}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۲-۷|}{\sqrt{۱۶+۴}}=\frac{۹}{\sqrt{۲۰}}\longrightarrow \text{مساحت مربع}=(\frac{۹}{\sqrt{۲۰}})^۲=\frac{۸۱}{۲۰}=۴/۰۵$$

توجه کنید فاصلهٔ دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطهٔ $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۴ - گزینه ۳

معادلات خطوط AB و CDرا می‌نویسیم.

$$\text{معادله‌ی خط } AB: \frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y}{x}=\frac{-۱}{-۱}\to y=x\to x-y=۰$$

$$\text{معادله‌ی خط } CD: \frac{y-y_C}{x-x_C}=\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D}\to\frac{y-۳}{x-۱}=\frac{۳-۴}{۱-۲}=۱\to y-۳=x-۱\to x-y+۲=۰$$

حال، فاصله این دو خط موازی را از یکدیگر بدست می‌آوریم.

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۰-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

توجه کنید برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم.

۵ - گزینه ۱

$$\begin{matrix} 4x-6y+3=0 \\ 4x-6y+2a=0 \end{matrix} \to d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} \to \sqrt{13}=\frac{|3-2a|}{\sqrt{16+36}}$$

$$\to \sqrt{13}=\frac{|3-2a|}{2\sqrt{13}} \to |3-2a|=26$$

$$3-2a=26 \to 2a=-23 \to a=-11/5 \ , \ 3-2a=-26 \to 2a=29 \to a=14/5$$

بنابراین مجموع مقادیر a برابر ۳ است.

توجه کنید برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ استفاده می‌کنیم.

۶ - گزینه ۲ شیب خط $2y+2x+1=0$ برابر -1 است و چون خطوط مماس بر این خط عمودند پس شیب آنها برابر یک است.

$$m_{\text{مماس}}=1 \to y'=1 \to 6x^2-5=1 \to 6x^2=6 \to x^2=1 \to x=\pm 1$$

$$x=1 \xrightarrow{\text{تابع}} y=2-5+1=-2 \xrightarrow{A\left|\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right. \ , \ m=1} y+2=1(x-1) \to x-y-3=0$$

$$x=-1 \xrightarrow{\text{تابع}} y=-2+5+1=4 \xrightarrow{A'\left|\begin{smallmatrix}-1\\4\end{smallmatrix}\right. \ , \ m=1} y-4=1(x+1) \to x-y+5=0$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ استفاده می‌کنیم.

$$d=\frac{|-3-5|}{\sqrt{1+1}}=\frac{8}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$$

۷ - گزینه ۳ دو خط موازی هستند پس شیب یکسان دارند، یعنی:

$$\frac{a}{6}=-\frac{b}{3} \to a=-2b$$

فاصلهٔ دو خط برابر ۳ است، پس داریم:

$$\frac{a}{6}x-y+4=0 \quad , \quad -\frac{b}{3}x-y-1=0$$

$$\to d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} \to 3=\frac{|4-(-1)|}{\sqrt{(\frac{a}{6})^2+(-1)^2}} \to \sqrt{(\frac{a}{6})^2+1}=\frac{5}{3}$$

$$\to (\frac{a}{6})^2+1=\frac{25}{9} \to (\frac{a}{6})^2=\frac{16}{9} \to (\frac{a}{6})^2=(\frac{4}{3})^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{6}=\frac{4}{3} \to a=8 \ , \ b=-4 \to ab=-32 \\ \frac{a}{6}=-\frac{4}{3} \to a=-8 \ , \ b=4 \to ab=-32 \end{cases}$$

توجه کنید فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از رابطهٔ $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ به‌دست می‌آید.

۸ - گزینه ۳ چون دو خط هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند بنابراین موازی و غیر منطبق هستند.

شرط موازی بودن: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} \to \underbrace{\frac{2a+1}{3}=\frac{2}{2a+6}}\neq\frac{2a+3}{2} \quad *$

$$(2a+1)(2a+6)=6 \to 4a^2+12a+2a+6=6 \to 4a^2+14a=0 \to 2a(2a+7)=0$$

$$\to \begin{cases} a=0 \xrightarrow{*} \frac{1}{3}=\frac{1}{3}\neq\frac{3}{2} \to \text{شرط برقرار است} \\ a=\frac{-7}{2} \xrightarrow{*} \frac{-6}{3}=\frac{2}{-1}=\frac{-4}{2} \to \text{(شرط برقرار نیست. (دو خط منطبق هستند} \end{cases}$$

پس $a=0$ قابل قبول است و معادلات دو خط به صورت $\begin{cases} 3x+6y=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$ یا به صورت ساده‌تر $\begin{cases} 3x+6y-2=0 \\ 3x+6y-9=0 \end{cases}$ در می آیند.

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-2-(-9)|}{\sqrt{9+36}}=\frac{7}{\sqrt{45}}=\frac{7}{3\sqrt{5}}$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ کمک می‌گیریم.

۹ ـ گزینه ۱

$3x-y=0 \to m=3 \quad 4y-12x=6 \to m'=3$

چون این دو ضلع با هم موازی هستند (شیب‌هایشان با هم برابر است) کافی است فاصله‌ی این دو ضلع را از هم حساب کنیم که یا طول مستطیل به دست می‌آید یا عرض مستطیل به دست می‌آید (معلوم نیست) و می‌دانیم برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ استفاده می‌شود. (ضرایب x, y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند).

$4y-12x=6 \to 12x-4y+6=0 \quad$ و $\quad 3x-y=0 \to 12x-4y=0$

$$\text{فاصله‌ی دو ضلع}=\frac{|6-0|}{\sqrt{144+16}}=\frac{6}{\sqrt{160}}=\frac{6}{4\sqrt{10}}=\frac{3}{2\sqrt{10}}$$

$$\text{عرض}=\frac{3}{2\sqrt{10}} \to \text{طول}=\frac{6}{2\sqrt{10}} \to S=(\frac{3}{2\sqrt{10}})(\frac{6}{2\sqrt{10}})=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}$$

$$\text{طول}=\frac{3}{2\sqrt{10}} \to \text{عرض}=\frac{3}{4\sqrt{10}} \to S=(\frac{3}{2\sqrt{10}})(\frac{3}{4\sqrt{10}})=\frac{9}{80}$$