

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ می‌دانیم: اگر n تعداد جملات یک دنباله حسابی با قدرنسبت d و جمله اول a باشد آنگاه مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a + (n-1) \cdot d)$$

کوچک‌ترین عدد دورقمی مضرب ۷ عدد ۱۴ است و بزرگترین آن عدد $98 = 14 \times 7$ می‌باشد بنابراین تعداد جملات آن:

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 = \frac{98 - 14}{7} + 1 = 13$$

$$S_n = \frac{13}{2} \cdot (2(14) + 12 \times 7) = 728$$

۲ - گزینه ۲

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \end{cases} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -20a_1 - 30d = -75 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} \Rightarrow -15a_1 = -45 \Rightarrow a_1 = 3, d = \frac{1}{2}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

۳ - گزینه ۲

نکته: در دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d می‌دانیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$\begin{cases} S_{10} = 3S_{12} \\ a_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{2}(2a + 9d) = 3 \times \frac{12}{2}(2a + 11d) \\ a + 2d = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + d = 0 \\ a + 2d = 6 \end{cases} \Rightarrow a = -2, d = 4$$

$$a_{10} = a + 9d = -2 + 9(4) = 34$$

۴ - گزینه ۳

در یک دنباله عددی داریم:

$$a_n - a_m = (n - m) \cdot d$$

$$d = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{3} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \xrightarrow[n=15]{a_1=1, d=\frac{1}{2}} S_{15} = \frac{15}{2} \left[2 \times (1) + (15-1) \times \frac{1}{2} \right] \Rightarrow S_{15} = 67.5$$

۵ - گزینه ۱

اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد آنگاه $2n$ عدد زوج و $2n-1$ عدد فرد است بنابراین مقادیر دنباله حسابی به این قرار است:

$$1, 3, 5, \dots, 2(n+2) - 1$$

دنباله حسابی با جمله ۱ و جمله آخر $2n+3$ می‌باشد. پس مجموع $(n+2)$ جمله اول آن برابر است با:

$$S_{n+2} = \frac{n+2}{2} (2n+3+1) \Rightarrow S = (n+2)^2$$

۶ - گزینه ۲ دنباله $5, 9, 13, \dots$ حسابی است با جمله اول $a = 5$ و قدر نسبت $d = 4$ و مجموع جملات از دستور $S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$ محاسبه می‌شود.

$$\frac{n}{2} [10 + (n-1)4] > 900 \Rightarrow n(3+2n) > 900 \Rightarrow 2n^2 + 3n - 900 > 0$$

پس از تعیین علامت، چون n عدد مثبت است الزاماً خواهیم داشت:

$$n > \frac{-3 + \sqrt{7209}}{4} \Rightarrow n \geq \frac{-3 + 85}{4} \Rightarrow n > 20.5 \Rightarrow n \geq 21$$

پس حداقل $n = 21$

۷ - گزینه ۲

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n), \quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} 4, 7, 10, 13, 16, \dots \\ 1, 5, 9, 13, 17, \dots \end{cases}$$

اولین جمله‌ی مشترک ۱۳ است و قدر نسبت دنباله‌ی مشترک برابر است با ک.م.م ۳ و ۴ یعنی $[3, 4] = 12$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 13 + 12(n-1) < 100 \Rightarrow 12n < 99 \Rightarrow n < \frac{99}{12} \Rightarrow n \leq 8$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_8 = 4(2(13) + 7(12)) = 4(110) = 440$$

۸ - گزینه ۴ روش اول: اگر جملات دنباله ی حسابی (عددی) را با a_1, a_2, \dots نشان دهیم، داریم:

$$a_1 + a_8 + \dots + a_{17} + a_{18} = S_{18} - S_9 = \frac{18(18-1)d}{2} - \frac{9(9-1)d}{2} = 9 + 9 = 18$$

روش دوم: در دنباله ی حسابی همواره داریم: $a_n = S_n - S_{n-1}$ و $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$\begin{cases} a_1 + a_8 + \dots + a_{17} + a_{18} = \frac{(18-9+1)}{2}(a_1 + a_{18}) = 9(a_1 + a_{18}) \\ a_1 = S_9 - S_8 = -\frac{9d}{2} + 9 = -\frac{1}{2}d, \quad a_{18} = S_{18} - S_{17} = 9 - \frac{17d}{2} = \frac{1}{2}d \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_8 + \dots + a_{18} = 9(-\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d) = 18$$

۹ - گزینه ۴ نکته: در فرمول S_n هر دنباله ی حسابی، ضریب پشت n^2 برابر نصف قدرنسبت یعنی $\frac{d}{2}$ است.

$$S_n = An^2 + Bn \Rightarrow A = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 2A$$

نکته: در هر دنباله ی حسابی داریم: $a_n - a_{n-1} = d$

$$S_n = 2n^2 + n \Rightarrow \frac{d}{2} = 2 \Rightarrow d = 4$$

$$\begin{aligned} a_{10}^2 - a_{90}^2 + a_{20}^2 - a_{70}^2 + \dots + a_{10}^2 - a_{1}^2 &= (a_{10} - a_{90})(a_{10} + a_{90}) + (a_{20} - a_{70})(a_{20} + a_{70}) \\ &+ \dots + (a_{10} - a_1)(a_{10} + a_1) = d(a_{10} + a_{90}) + d(a_{20} + a_{70}) + \dots + d(a_{10} + a_1) \\ &= d(a_{10} + a_{90} + a_{20} + a_{70} + \dots + a_{10} + a_1) = dS_{10} = 4S_{10} \end{aligned}$$

$$S_{10} = 2 \times 10^2 + 10 = 180 + 10 = 190 \Rightarrow 4S_{10} = 4 \times 190 = 760$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

۱۰ - گزینه ۲ در هر دنباله حسابی:

با کمی دقت معلوم است که در یک دنباله با ۲۴ جمله، ۹ جمله ی آخر از جمله ی شانزدهم تا جمله ی بیست و چهارم را شامل می شود و جملاتی که بین ۹ جمله ی اول و نه جمله ی آخر قرار ندارند، شامل جملات دهم تا پانزدهم است که تعداد آن ۶ عدد است. بنابراین:

$$\frac{\text{مجموع ۹ جمله ی آخر} + \text{مجموع ۹ جمله ی اول}}{\text{مجموع بقیه ی جملات}} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_9) + (a_{16} + \dots + a_{24})}{a_{10} + a_{11} + \dots + a_{15}}$$

$$= \frac{\frac{9}{2}(a_1 + a_9) + \frac{9}{2}(a_{16} + a_{24})}{\frac{9}{2}(a_{10} + a_{15})} = \frac{\frac{9}{2}(2a_1 + 8d) + \frac{9}{2}(2a_1 + 14d)}{\frac{9}{2}(2a_1 + 15d)} = \frac{9(2a_1 + 11d)}{9(2a_1 + 15d)} = \frac{2a_1 + 11d}{2a_1 + 15d}$$

۱۱ - گزینه ۴

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

نکته: S_n دنباله ی حسابی به صورت مقابل است:

$$15, 18, 21, \dots \Rightarrow a_1 = 15, d = 3, S_9 = \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = \frac{9}{2}(30 + 24) = 135$$

کتاب مورد نظر ۱۳۵ صفحه دارد.

$$a_1 = ?, d = 3 \Rightarrow S_5 = 135 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 135 \Rightarrow \frac{5}{2} \times 2(a_1 + 2d) = 135 \Rightarrow a_1 + 2d = 27 \Rightarrow a_1 + 2 \times 3 = 27 \Rightarrow a_1 = 21$$

باید روز اول ۲۱ صفحه مطالعه کند.

۱۲ - گزینه ۱

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

نکته: S_n دنباله ی حسابی به صورت مقابل است:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نکته: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n به صورت مقابل است:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 \times 4 & 2 \times 4 & 3 \times 4 & 4 \times 4 & 5 \times 4 & 6 \times 4 & 7 \times 4 & 8 \times 4 & 9 \times 4 & 10 \times 4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40, \dots \end{array}$$

دسته ۱ دسته ۲ دسته ۳ دسته ۴

با توجه به دسته های فوق شماره آخرین جمله هر دسته برابر است با مجموع اعداد طبیعی از یک تا شماره آن دسته، پس شماره آخرین جمله دسته پانزدهم بصورت زیر است.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 15 = \frac{15 \times 16}{2} = 120 \rightarrow \text{شماره آخرین جمله دسته پانزدهم}$$

$$\text{شماره اولین جمله دسته پانزدهم} = 120 - 15 + 1 = 106$$

$\begin{matrix} 106 \times 4 \\ \uparrow \\ 424 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} 120 \times 4 \\ \uparrow \\ 480 \end{matrix}$
 دسته پانزدهم : ۴۲۴ , ۴۲۸ , ... , ۴۸۰

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2}(424 + 480) = 6780$$

۱۳ - گزینه ۳ ابتدا این الگو را بصورت زیر مرتب می کنیم.

$\underbrace{10, 14}_{\text{دسته اول ۲ عدد}}, \underbrace{18, 22, 26, 30, 34}_{\text{دسته دوم ۵ عدد}}, \underbrace{38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, \dots}_{\text{دسته سوم ۸ عدد}}$

با کمی دقت در این الگو، تعداد اعداد هر دسته یک دنباله حسابی با جمله اول ۲ و قدرنسبت ۳ است و اعداد هر دسته هم یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۰ و قدرنسبت ۴ است. برای رسیدن به جمله نهم در دسته یازدهم باید ببینیم که آخرین عدد دسته ی دهم چندمین عدد الگوی بالا است.

یعنی جمع $S_n = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$ را بیابیم.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} \cdot (2(2) + 9 \times 3) = 155$$

پس آخرین عدد دسته دهم عدد ۱۵۵ ام الگوی بالا است و عدد نهم دسته یازدهم، جمله $164 = 155 + 9$ امین جمله الگوی فوق است.

$$10, 14, 18, \dots \Rightarrow a_{164} = a_1 + 163 \times d = 10 + 163 \times 4 = 662$$

۱۴ - گزینه ۴

$(2), (4, 6), (8, 10, 12), \dots$

شماره آخرین جمله دسته n ام برابر با مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n است. پس شماره آخرین جمله دسته نهم به صورت زیر است.

$$شماره آخرین جمله دسته نهم = 1 + 2 + \dots + 9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

پس اولین جمله دسته دهم، چهل و ششمین عدد زوج یعنی $92 = 46 \times 2$ است و داریم:

$$(92, 94, \dots) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 5(2 \times 92 + 9 \times 2) = 1010$$

۱۵ - گزینه ۲ تعداد اعداد ردیفها عبارت است از $2, 5, 8, \dots$ ، که یک دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$ است. در ردیف هفدهم $50 = 3(17) - 1 = a_{17}$ عدد وجود دارد. برای اینکه ببینیم آخرین عدد ردیف هفدهم چندمین عدد طبیعی است، کافی است مجموع ۱۷ جمله اول دنباله a_n را حساب کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}(2 + 50) = 442$$

پس اولین عدد ردیف هجدهم برابر است با:

$$442 + 1 = 443$$