پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ قطرهای متوازی‌الاضلاع، یکدیگر را نصف می‌کنند و داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \to ۳ + (-۳) = -۲ + x_D \to x_D = ۲ \\ y_A + y_C = y_B + y_D \to ۴ + (-۲) = ۱ + y_D \to y_D = ۱ \end{cases}$$
$$\to x_D + y_D = ۲ + ۱ = ۳$$

۲ - گزینه ۴

سه نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} a \\ ۳ \end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix} ۶ \\ ۴a+۱ \end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right.$ را در نظر می‌گیریم.

شرط هم‌راستا بودن : $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \to \frac{۳ - ۴a - ۱}{a - ۶} = \frac{۴a + ۱}{۶ - ۰} \to \frac{۲ - ۴a}{a - ۶} = \frac{۴a + ۱}{۶}$

$$\to ۴a^۲ + a - ۲۴a - ۶ = ۱۲ - ۲۴a \to ۴a^۲ + a - ۱۸ = ۰$$
$$\to \Delta = ۱ - ۴(۴)(-۱۸) = ۲۸۹ \to a = \frac{-۱ \pm ۱۷}{۸} = ۲ \ , \ -\frac{۹}{۴}$$

۳ - گزینه ۴ در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگر هستند و داریم:

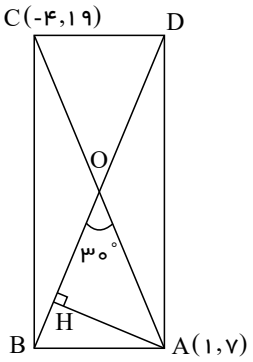
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \to ۲ + ۸ = ۴ + x_D \to x_D = ۶ \\ y_A + y_C = y_B + y_D \to ۳ + ۲ = ۱ + y_D \to y_D = ۴ \end{cases} \to D(۶, ۴)$$

$\to BD$ طول قطر $= \sqrt{(۶ - ۴)^۲ + (۴ - ۱)^۲} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳}$

۴ - گزینه ۳ یک نقطه‌ی دلخواه روی تابع $y = |x + ۲|$ در نظر می‌گیریم $A\left|\begin{matrix} x \\ |x+۲| \end{matrix}\right.$ و فاصله‌ی آن از مبدأ یعنی $O\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right.$ را حساب می‌کنیم .

$OA = \sqrt{x^۲ + (x + ۲)^۲} = ۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ + x^۲ + ۴ + ۴x = ۹ \Rightarrow ۲x^۲ + ۴x - ۵ = ۰ \xrightarrow{\frac{c}{a} < ۰}$ دو ریشه‌ی مختلف العلامت دارد

۵ - گزینه ۱ ابتدا طول قطر AC را به‌دست می‌آوریم:



$$\to AC = \sqrt{(x_A - x_C)^۲ + (y_A - y_C)^۲} = \sqrt{(۱ - (-۴))^۲ + (۷ - ۱۹)^۲} = \sqrt{۲۵ + ۱۴۴} = \sqrt{۱۶۹} \to AC = ۱۳$$

و چون در مستطیل قطرها هم‌دیگر را نصف می‌کنند داریم:

$$OA = OC = OB = OD = \frac{۱۳}{۲}$$

قطرهای مستطیل، مستطیل را به چهار مثلث هم مساحت تقسیم می‌کنند پس داریم:

$$S_{ABCD} = ۴S_{OAB} \to S_{ABCD} = ۴(\frac{۱}{۲} \times OA \times OB \times \sin ۳۰^\circ) = ۴(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱۳}{۲} \times \frac{۱۳}{۲} \times \frac{۱}{۲}) = \frac{۱۶۹}{۴}$$

توجه کنید مساحت هر مثلث را می‌توان از نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها به‌دست آورد.

۶ - گزینه ۳ کافی است طول سه ضلع مثلث را حساب کنیم.

$$\left.\begin{matrix} AB = \sqrt{(۰ - ۳)^۲ + (-۱ - ۱)^۲} = \sqrt{۹ + ۴} = \sqrt{۱۳} \\ AC = \sqrt{(۰ - ۲)^۲ + (-۱ + ۴)^۲} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳} \\ BC = \sqrt{(۳ - ۲)^۲ + (۱ + ۴)^۲} = \sqrt{۱ + ۲۵} = \sqrt{۲۶} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ مثلث متساوی الساقین است.

برای این که مشخص کنیم این مثلث، قائم‌الزاویه است یا خیر باید رابطه‌ی فیثاغورث را چک کنید.

$(\sqrt{۲۶})^۲ = (\sqrt{۱۳})^۲ + (\sqrt{۱۳})^۲ \to ۲۶ = ۱۳ + ۱۳ \to ۲۶ = ۲۶ \to$ مثلث قائم‌الزاویه است.

۷ - گزینه ۲ هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می‌توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم.

$$S=\frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$
$$=\frac{۱}{۲}|۲(۰-۲)+۳(۲-۵)+۰(۵-۰)|=\frac{۱}{۲}|-۴-۹+۰|=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

۸ - گزینه ۳ هرگاه مختصات سه رأس مثلث ABC را داشته باشیم مساحت مثلث از این رابطه به دست می‌آید.

$$S=\frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$
$$\to ۳=\frac{۱}{۲}|۱(۳+۱)+۲(-۱-۱)+k(۱-۳)|$$
$$\to ۶=|۴-۴+۲k|\to|۲k|=۶\to ۲k=\pm۶\to k=\pm۳$$

۹ - گزینه ۳

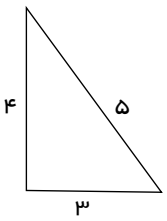
طول اضلاع مثلث را به‌دست می‌آوریم.

$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(-۱-۳)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{۱۶}=۴$$

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(-۱-۳)^۲+(۱-(-۲))^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(۳-۳)^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۹}=۳$$

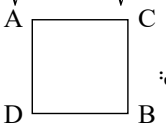
$۵^۲=۴^۲+۳^۲$ است پس مثلث قائم‌الزاویه است.



$$\to S=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$$

۱۰ - گزینه ۱ طول پاره خط‌های AB و AC و BC را پیدا می‌کنیم تا مشخص شود ترتیب قرار گرفتن رئوس، در مربع چگونه است.

$$AB=\sqrt{(۱+۵)^۲+(۲-۲)^۲}=\sqrt{۳۶+۰}=۶$$
$$AC=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸}$$
$$BC=\sqrt{(-۵+۲)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸}$$



واضح است که AC و BC اضلاع مربع و AB قطر مربع است. (قطر مربع، از حاصلضرب یک ضلع در $\sqrt{۲}$ بدست می‌آید) یعنی:

$$\left.\begin{array}{l}x_A+x_B=x_C+x_D\to ۱-۵=-۲+x_D\to x_D=-۲\\ y_A+y_B=y_C+y_D\to ۲+۲=۵+y_D\to y_D=-۱\end{array}\right\}\to x_D+y_D=-۳$$

۱۱ - گزینه ۱ شرط بر یک استقامت بودن سه نقطه‌ی C,B,A آن است که داشته باشیم:

$$\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}\to\frac{۳-۱}{۲-a-۱}=\frac{۱+۵}{a+۱}\to\frac{۲}{۱-a}=\frac{۶}{a+۱}$$
$$\to ۲a+۲=۶-۶a\to ۸a=۴\to a=\frac{۱}{۲}\to a^۲=\frac{۱}{۴}$$

۱۲ - گزینه ۲ چون $A(-۴,-۱)$ و $B(-۲,-۳)$ دو رأس غیرمجاور یک مربع هستند پس طول پاره‌خط AB برابر قطر مربع است و مرکز مربع (نقطهٔ M و وسط قطرها) روی خط $my+(m-۲)x=۱$ قرار دارد.

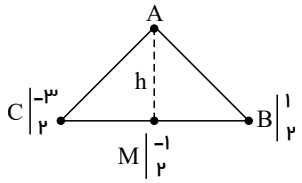
$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(-۴+۲)^۲+(-۱+۳)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}$$

$$\longrightarrow AB=۲\sqrt{۲}\longrightarrow \text{قطر مربع } d=۲\sqrt{۲}\longrightarrow S=\frac{d^۲}{۲}=\frac{(\sqrt{۸})^۲}{۲}=\frac{۸}{۲}\longrightarrow S=۴$$

$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{-۴-۲}{۲}=-۳\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{-۱-۳}{۲}=-۲\end{cases}\to M(-۳,-۲)\xrightarrow{my+(m-۲)x=۱}-۲m-۳m+۶=۱\to m=۱$$

پس $\frac{S}{m}=۴$ است.

۱۳ - گزینه ۴



شکل فرضی فوق را درنظر بگیرید. با توجه به هم‌عرض بودن نقاط B و C، مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC به‌صورت $\left|\begin{matrix}\frac{-۳+۱}{۲}\\ ۲\end{matrix}\right.$ است. از آن‌جا که مثلث متساوی‌الساقین است، قطعاً نقطهٔ A در راستای عمودی نقطهٔ M و به فاصلهٔ h (ارتفاع مثلث) از آن خواهد بود. یعنی:

$A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲-h\end{matrix}\right.$ یا $A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲+h\end{matrix}\right.$

حال دقت کنید که مساحت مثلث ۴ واحد مربع و طول قاعدهٔ آن (BC) هم ۴ واحد است. پس:

$$S=\frac{۴\times h}{۲}\xrightarrow{S=۴}h=۲$$

لذا مختصات نقطهٔ A به‌صورت $\left|\begin{matrix}-۱\\ ۴\end{matrix}\right.$ یا $\left|\begin{matrix}-۱\\ ۰\end{matrix}\right.$ است. یعنی مجموع طول و عرض نقطهٔ A برابر با $۳=۴+۱-$ یا $-۱=۰+۱-$ است.

۱۴ - گزینه ۴ ابتدا طول سه ضلع مثلث را به‌دست می‌آوریم:

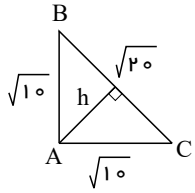
$$AB=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

$$AC=\sqrt{(۱-۲)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

$$BC=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۱-۵)^۲}=\sqrt{۲۰}$$

$$\Rightarrow AB^۲+AC^۲=BC^۲$$

درنتیجه مثلث ABC، یک مثلث قائم‌الزاویه در رأس A بوده و وتر (BC) بزرگ‌ترین ضلع آن است. اگر ارتفاع وارد بر وتر را h بنامیم، داریم:



مساحت مثلث: $\frac{۱}{۲}\times AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times BC\times h$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}=\sqrt{۲۰}\times h\Rightarrow h=\sqrt{۵}$$

بنابراین اندازهٔ ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع، برابر $\sqrt{۵}$ است.