پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۱

$$\underbrace{|a-b|}_{+}+\underbrace{|a+1|}_{+}-\underbrace{|1-b|}_{+}=a-b+a+1-(1-b)=2a$$

۲ ـ گزینه ۴

$$x^2<-x\Rightarrow x^2+x<0\Rightarrow -1<x<0\Rightarrow \underbrace{|2x-1|}_{-}+\underbrace{|2-x|}_{+}=-2x+1+2-x=3-3x$$

۳ ـ گزینه ۳

$$f(x)=|x+|x||+|x-|x||\ ,\ D_f=\mathbb{R}$$
$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0\Rightarrow f(x)=|x+x|+|x-x|=|2x|=2|x| \\ x<0\Rightarrow f(x)=|x-x|+|x-(-x)|=0+|2x|=2|x| \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=2|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

تابعی که دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ بوده و برابر با $2|x|$ باشد، فقط گزینهٔ ۳ است زیرا:

$$y=\sqrt{4x^2}=|2x|=2|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

۴ ـ گزینه ۲

می‌دانیم که برای تعیین دامنهٔ توابع $y=\sqrt[2n]{f}$ باید $f\geq 0$ باشد.

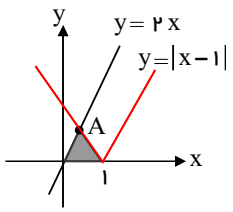
$$y=\sqrt{||x-1|-3|-2}$$
$$||x-1|-3|\geq 2\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}|x-1|-3\geq 2\\ |x-1|-3\leq -2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}|x-1|\geq 5\Rightarrow x-1\leq -5 \text{ یا } x-1\geq 5\Rightarrow x\leq -4 \text{ یا } x\geq 6\\ |x-1|\leq 1\Rightarrow -1\leq x-1\leq 1\rightarrow 0\leq x\leq 2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-4]\cup[0,2]\cup[6,+\infty)$$

دامنهٔ تابع شامل ۶ عدد صحیح نیست.

۵ ـ گزینه ۱

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



A محل برخورد خط $y=2x$ و $y=-(x-1)$ است.

$$\left\{\begin{array}{l}y=2x\\ y=-x+1\end{array}\right.\Rightarrow 2x=-x+1\Rightarrow 3x=1\Rightarrow x=\frac{1}{3}\xrightarrow{y=2x}y=\frac{2}{3}\Rightarrow A(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$
$$\Rightarrow S_{\text{مثلث}}=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}\times 1)=\frac{1}{3}$$

۶ ـ گزینه ۴

باتوجه به نامساوی مثلثی $(|a+b|\leq|a|+|b|)$ داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}a=x-2\\ b=2x-1\end{array}\right.\Rightarrow a+b=3x-3$$
$$|a|+|b|\geq|a+b|\Rightarrow|x-2|+|2x-1|\geq|3x-3|\geq 0\Rightarrow a\geq\frac{|3x-3|}{|x-2|+|2x-1|}\geq 0$$

۷ ـ گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2}\qquad,\qquad\min\{a,b\}=\frac{a+b-|a-b|}{2}$$

بنابراین داریم:

$$x=\max\left\{\frac{a}{2},\frac{-a}{2}\right\}=\frac{\frac{a}{2}+(-\frac{a}{2})+\left|\frac{a}{2}-(-\frac{a}{2})\right|}{2}=\frac{|a|}{2}$$
$$y=\min\left\{\frac{a}{4},-\frac{a}{4}\right\}=\frac{\frac{a}{4}+(-\frac{a}{4})-\left|\frac{a}{4}-(-\frac{a}{4})\right|}{2}=\frac{-|a|}{4}$$
$$x-y=\frac{|a|}{2}-\frac{-|a|}{4}=\frac{3|a|}{4}$$

۸ ـ گزینه ۴ عبارت داده شده زمانی بیش‌ترین مقدار را دارد که مخرج آن کم‌ترین مقدار را داشته باشد و چون بیش‌ترین مقدار این عبارت ۴ است، پس کمترین مقدار مخرج برابر ۶ می‌باشد و داریم:

$f(x)=|x-۴|+|x+a| \Rightarrow \min f=۶$

با توجه به نمودار گلدانی شکل، کم‌ترین مقدار تابع f در محدودهٔ بین ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها اتفاق می‌افتد که داریم:

$x-۴=۰ \Rightarrow x=۴\ ,\ x+a=۰ \Rightarrow x=-a$

(حالت ۱) $-a<۴ \Rightarrow -a<x<۴ \Rightarrow -x+۴+x+a=۶ \Rightarrow a=۲$ قابل قبول

(حالت ۲) $-a>۴ \Rightarrow ۴<x<-a \Rightarrow x-۴-x-a=۶ \Rightarrow a=-۱۰$ قابل قبول

کم‌ترین مقدار a برابر -۱۰ می‌باشد.

۹ - گزینه ۴

می‌دانیم برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=\sqrt[۲n]{f}$ باید $f \geq ۰$ قرار دهیم.

ابتدا ریشهٔ داخل قدرمطلق را بدست می‌آوریم:

$$x-۱=۰ \to x=۱$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq ۱ \Rightarrow y=\sqrt{۴x-۹} \Rightarrow ۴x-۹ \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{۹}{۴} \\ x<۱ \Rightarrow y=\sqrt{-۲x-۳} \Rightarrow -۲x-۳ \geq ۰ \Rightarrow x \leq -\frac{۳}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{U} D=(-\infty,-\frac{۳}{۲}] \cup [\frac{۹}{۴},+\infty)$$

دامنهٔ تابع شامل اعداد صحیح $-۱, ۰, ۱, ۲$ نمی‌باشد.

۱۰ - گزینه ۱

$$a^۲<b^۲ \to |a|<|b| \to -|b|<a<|b| \xrightarrow{b<۰} b<a<-b$$

$$\to \begin{cases} ۰<a-b \\ a+b<۰ \\ a-۴b=(a-b)-۳b>۰ \end{cases} \to \begin{cases} |a-b|=a-b \\ |a+b|=-a-b \\ |a-۴b|=a-۴b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{|a+b|+|a-b|}{|a-۴b|-|a-b|}=\frac{-a-b+a-b}{a-۴b-a+b}=\frac{-۲b}{-۳b}=\frac{۲}{۳}$$

۱۱ - گزینه ۳

$$x+\sqrt{x^۲-۲\sqrt{۳}x+۳}=\sqrt{۳} \Rightarrow x+\sqrt{(x-\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{(x-\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۳}-x$$

$$\to \left|x-\sqrt{۳}\right|=\sqrt{۳}-x$$

می‌دانیم اگر $|u|=-u$ باشد، آن‌گاه $u \leq ۰$ است. پس:

$$x-\sqrt{۳} \leq ۰ \Rightarrow x \leq \sqrt{۳} \Rightarrow x \in (-\infty,\sqrt{۳}]$$

۱۲ - گزینه ۲ در نتایج نامساوی مثلثی می‌دانیم که $|a-b| \leq |a|+|b|$ می‌باشد و حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $ab \leq ۰$ باشد.

$$|x^۲-x|+x^۲=|x| \to |\underbrace{x^۲-x}_{b}|+|\underbrace{x^۲}_{a}|=|\underbrace{x}_{a-b}| \to \underbrace{x^۲}_{+}(x^۲-x)<۰$$

$$\to x^۲-x<۰ \to x(x-۱)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰<x<۱$$

$$\to \begin{cases} \alpha=\frac{۰+۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \\ \beta=\frac{۱-۰}{۲}=\frac{۱}{۲} \end{cases} \to |x-\frac{۱}{۲}|<\frac{۱}{۲} \to \alpha \cdot \beta=\frac{۱}{۴}$$

توجه:

$$a<x<b \to |x-\frac{b+a}{۲}|<\frac{b-a}{۲}$$

۱۳ - گزینه ۲ راه اول:

$$A=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}-\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}$$

$$\to A=\sqrt{(\sqrt{x-۱}+۱)^۲}-\sqrt{(\sqrt{x-۱}-۱)^۲}$$

$$\to A=|\sqrt{x-۱}+۱|-|\sqrt{x-۱}-۱|$$

$$۱ \leq x \leq ۲ \to ۰ \leq x-۱ \leq ۱ \to ۰ \leq \sqrt{x-۱} \leq ۱$$

$$\to A=(\sqrt{x-۱}+۱)-(-\sqrt{x-۱}+۱) \to A=۲\sqrt{x-۱} \to ۰ \leq A \leq ۲$$

راه دوم:

با کمی دقت متوجه می‌شویم که عبارت‌های زیر رادیکال مزدوج یکدیگرند. بنابراین بهترین روش برای حل این است که به توان ۲ برسانیم.

$$A=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

$$A^2=x+\cancel{2\sqrt{x-1}}+x-\cancel{2\sqrt{x-1}}-2\sqrt{(x+2\sqrt{x-1})\cdot(x-2\sqrt{x-1})}$$

$$A^2=2x-2\sqrt{x^2-4x+4}\Rightarrow A^2=2x-2|x-2|$$

$$\xrightarrow{1\le x\le 2} A^2=2x+2x-4\to A=2\sqrt{x-1}$$

برد عبارت اخیر را می‌یابیم.

$$1\le x\le 2\to 0\le x-1\le 1\to 0\le\sqrt{x-1}\le 1$$

سه طرف را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم.

$$0\le 2\sqrt{x-1}\le 2\to R_A=[0,2]$$

۱۴ - گزینه ۴ بنا به نامساوی مثلثی می‌دانیم : $|x|+|y|\ge|x+y|$ است و در صورتی تساوی برقرار نیست که این دو عبارت مختلف‌العلامت باشد.

در عبارت $|2x-1|+|x-8|>|3x-9|$ علامت تساوی برقرار نیست.

بنابراین داریم:

$$(2x-1)\cdot(x-8)<0\Rightarrow\ x\in(\frac{1}{2},8)$$

در این بازه اعداد صحیح $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ قرار دارند.

۱۵ - گزینه ۱ چون $b<0<a$ و $|b|>|a|$ پس $a+b$ منفی و $2a-b$ مثبت است؛ داریم:

$$|2a-b|+|b+a|-|b|=2a-b-(b+a)-(-b)=2a-b-b-a+b=a-b$$

۱۶ - گزینه ۳ چون a مثبت، b منفی و $|b|>|a|$ پس $a-b$ مثبت، $a+b$ منفی و $|b|-|a|$ مثبت هستند و داریم:

$$|a-b|-|a+b|-||b|-|a||=a-b+a+b-(|b|-|a|)=2a-|b|+|a|$$
$$=2a-(-b)+a=3a+b$$

۱۷ - گزینه ۱ ابتدا مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}a-2=a+4\Rightarrow -2=4 \text{ غ.ق.ق}\\ a-2=-a-4\Rightarrow 2a=-2\Rightarrow a=-1\end{cases}$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $|x+1|<2$ را حل کنیم:

$$-2<x+1<2\Rightarrow -3<x<1$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، بازهٔ $(-3,1)$ است.

۱۸ - گزینه ۲

گزینه (۱): قضیه نامساوی مثلثی است. $|a+b|\le|a|+|b|$

گزینه (۳):

$$|a|-|b|\le|a-b|\xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}}(|a|-|b|)^2\le(|a-b|)^2\Leftrightarrow|a|^2+|b|^2-2|a||b|\le a^2+b^2-2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2|ab|\le a^2+b^2-2ab\Leftrightarrow -2|ab|\le -2ab\Leftrightarrow|ab|\ge ab$$ همواره برقرار است.

گزینه (۴): در قضیه نامساوی مثلثی به جای b , $(-b)$ قرار می‌دهیم:

$$|a+(-b)|\le|a|+|-b|\Rightarrow|a-b|\le|a|+|b|$$

گزینه (۲): اگر $a=2$, $b=3$ در نظر بگیریم، داریم:

$$|a|-|b|=2-3=-1\not\ge|a-b|=|2-3|=1$$

۱۹ - گزینه ۱ باتوجه به نامساوی $|a+b|\le|a|+|b|$ و این‌که $b=-1$ و $a=2x$ داریم:

$$|2x-1|\le|2x|+|-1|\to|2x-1|\le|2x|+1$$

$$\to 1\le\frac{|2x|+1}{|2x-1|}\to -1\ge-\frac{|2x|+1}{|2x-1|}\to 3\ge 4-\frac{|2x|+1}{|2x-1|}\to y\le 3$$

بنابراین بیشترین مقدار y برابر ۳ بوده ولی تابع کمترین مقدار ندارد زیرا برد تابع بازه‌ی $(-\infty,3]$ است.