# پاسخنامه تشریحی

**۱ - گزینه ۲**

$$mx - ۳\sqrt{x} + m - ۲ = ۰ \Rightarrow m(\sqrt{x})^۲ - ۳\sqrt{x} + m - ۲ = ۰ \ (I)$$
$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^۲ - ۳t + m - ۲ = ۰$$

**اگر این معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی باشد معادله‌ی $I$ فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد $\sqrt{x}$ برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a} < ۰$ باشد.**

$$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{m-۲}{m} < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ < m < ۲$$

**دقت کنید اگر معادله‌ی $mt^۲ - ۳t + m - ۲ = ۰$ دارای یک ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد، نیز معادله‌ی $I$ فقط یک جواب دارد.**

$$\begin{cases} \Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴m(m-۲) = ۰ \Rightarrow ۴m^۲ - ۸m - ۹ = ۰ \begin{cases} m = \dfrac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲} \\ m = \dfrac{۲-\sqrt{۱۳}}{۲} \end{cases} \\ \underbrace{\dfrac{-b}{۲a}}_{\text{ریشه مضاعف}} > ۰ \Rightarrow \dfrac{۳}{۲m} > ۰ \Rightarrow m > ۰ \end{cases}$$

**پس جواب می‌شود:** $\left\{\dfrac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲}\right\} \cup ۰ < m < ۲$ **. بنابراین گزینه‌ی دوم می‌تواند صحیح باشد.**

**۲ - گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > ۰$، $S < ۰$ و $P > ۰$ باشد.**

$$\Delta > ۰ \xrightarrow{b^۲-۴ac>۰} ۴m^۲ - ۴(m-۶)(-۳) > ۰ \to m^۲ + ۳m - ۱۸ > ۰ \to (m+۶)(m-۳) > ۰$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -۶ \quad \text{یا} \quad m > ۳ \quad (I)$$
$$S < ۰ \to \frac{-b}{a} < ۰ \to \frac{۲m}{m-۶} < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ < m < ۶ \qquad (II)$$
$$P > ۰ \to \frac{c}{a} > ۰ \to \frac{-۳}{m-۶} > ۰ \to m - ۶ < ۰ \to m < ۶ \qquad (III)$$

**از اشتراک جواب‌های $I$ و $II$ و $III$ به جواب $۳ < m < ۶$ می‌رسیم.**

**۳ - گزینه ۴ می‌دانیم برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید جای $a$ و $c$ را عوض کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $k$ واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید $x$ را به $x+k$ تبدیل کنیم.**

$$۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \xrightarrow[\text{جای } a,c \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \xrightarrow[x \to x+۱]{\text{یک واحد کمتر}} -(x+۱)^۲ - ۳(x+۱) + ۲ = ۰$$
$$\to -x^۲ - ۲x - ۱ - ۳x - ۳ + ۲ = ۰ \to x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$$

**۴ - گزینه ۲**

$$(x^۲+x)^۲ - ۱۸(x^۲+x) + ۷۲ = ۰ \xrightarrow{x^۲+x=A} A^۲ - ۱۸A + ۷۲ = ۰ \Rightarrow (A-۱۲)(A-۶) = ۰$$

$$\left.\begin{array}{l} A = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -۱ \\ A = ۶ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \alpha' + \beta' = -\dfrac{b}{a} = -۱ \end{array}\right. \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -۲$$

**۵ - گزینه ۱ کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیه‌ی اول $(y=x)$ تلاقی دهیم و معادله‌ی تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.**

$$\begin{cases} y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ = x \Rightarrow \boxed{۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰} :$$ **معادله‌ی تلاقی**

**شرط ریشه‌ی مضاعف :** $\Delta = ۰ \to b^۲ - ۴ac = ۰ \to m^۲ - ۴(۲)(m+۶) = ۰ \to m^۲ - ۸m - ۴۸ = ۰$

$$\to (m-۱۲)(m+۴) = ۰ \to m = ۱۲, -۴$$

**حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار $m$، طول نقطه‌ی تماس مثبت است (در ناحیه‌ی اول $x$ مثبت است).**

$m=۱۲ \to ۲x^۲+۱۲x+۱۸=۰ \to x^۲+۶x+۹=۰ \to (x+۳)^۲=۰ \to x=-۳$ غ ق ق

$m=-۴ \to ۲x^۲-۴x+۲=۰ \to x^۲-۲x+۱=۰ \to (x-۱)^۲=۰ \to x=۱$ ق ق

۶ - گزینه ۱

روش اول: اگر $t$ ریشه‌ی معادله‌ی جدید و $x$ ریشه‌ی معادله ی قدیم باشد آن‌گاه:

$$t=\frac{۲}{x} \Rightarrow x=\frac{۲}{t} \xrightarrow{\text{معادله}} \frac{۱۶}{t^۲}-\frac{۱۴}{t}+۳=۰ \xrightarrow{\times t^۲} ۱۶-۱۴t+۳t^۲=۰ \to ۳t^۲-۱۴t+۱۶=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۳x^۲+ax+۱۰=۰} a=-۱۴ \ , \ b=۱۶$$

روش دوم: ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده شده باشد سپس معادله‌ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه هایش دو برابر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم بدست آمده باشد پس جای $a$ , $c$ را عوض کرده و سپس $b$ را در ۲ و $c$ را در $۲^۲$ ضرب کنیم.

$$۴x^۲-۷x+۳=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۷x+۴=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۱۴x+۱۶=۰$$

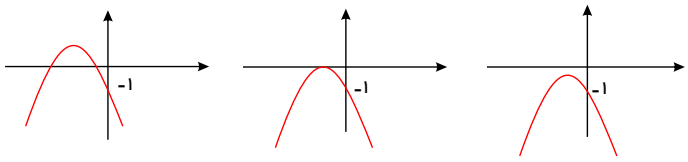
این معادله را با $۳x^۲+ax+b=۰$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a=-۱۴ \ , \ b=۱۶$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^۲+bx+a=۰$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bkx+ck^۲=۰$، $k$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می‌باشند.

۷ - گزینه ۱ اگر در تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ ، $\frac{c}{a}<۰$ باشد.(یعنی $a$ و $c$ مختلف العلامه باشند)، تابع درجه دوم از ۴ ناحیه می گذرد. بنابراین باید: $m+۲<۰$ یعنی $m<-۲$

۸ - گزینه ۱ چون نمودار تابع از ناحیه‌ی اول نمی گذرد، نمودار تابع به سه حالت زیر می‌تواند باشد:




$x^۲$ ضریب $<۰ \Rightarrow a-۳<۰ \Rightarrow a<۳ \quad (۱)$

اگر دو ریشه داشته باشد باید هر دو منفی باشد که داریم:

$\Delta>۰ \Rightarrow a^۲+۴a-۱۲>۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۶)>۰ \Rightarrow a>۲$ یا $a<-۶ \quad (۲)$

$P=\alpha\beta>۰ \Rightarrow P=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{a-۳}>۰ \Rightarrow a-۳<۰ \to a<۳ \quad (۱)$

$S=\alpha+\beta<۰ \Rightarrow S=-\frac{b}{a}=\underbrace{\frac{-a}{a-۳}}_{-}<۰ \Rightarrow -a>۰ \Rightarrow a<۰ \quad (۳)$

که اشتراک (۱) و (۲) و (۳) برابر $a<-۶$ می شود.

حال فرض می کنیم فاقد ریشه یا ریشه مضاعف باشد داریم:

$\Delta \le ۰ \Rightarrow a^۲+۴a-۱۲ \le ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۶) \le ۰ \Rightarrow -۶ \le a \le ۲ \quad (۴)$

که اشتراک (۱) و (۴) برابر $-۶ \le a \le ۲$ است و اجتماع دو بازه برابر $a \le ۲$ می باشد.

۹ - گزینه ۲

معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $k$ واحد بیشتر از ریشه های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x-k)^۲+b(x-k)+c=۰$$

پس کافی است $x$ را به $x-۱$ تبدیل کنیم.

$$۳(x-۱)^۲+۷(x-۱)+۱=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۶x+۳+۷x-۷+۱=۰ \Rightarrow ۳x^۲+x-۳=۰$$

برای مقایسه با $x^۲+ax+b=۰$ معادله را بر ۳ تقسیم می کنیم.

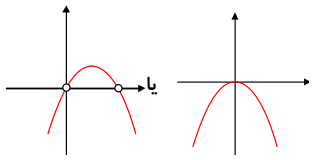
$$x^۲+\frac{۱}{۳}x-۱=۰ \to a=\frac{۱}{۳} \ , \ b=-۱$$

۱۰ - گزینه ۲ برای اینکه از ناحیه‌ی دوم عبور نکند باید این سهمی رو به پائین رسم شود یعنی $a<۰$ باشد و برای این تابع داریم:

$$y=ax^۲-(a+۲)x=۰ \to x\cdot(ax-a-۲)=۰$$

$$\boxed{x=۰} \ , \ ax=a+۲ \to \boxed{x=\frac{a+۲}{a}}$$

چون یکی از ریشه‌ها $x=۰$ است پس باید از مبدأ عبور کند و برای اینکه از ناحیه‌ی دوم عبور نکند ریشه‌ی بعدی باید نامنفی باشد یعنی شکل سهمی به یکی از این صورت‌ها باشد



$$x=\frac{a+۲}{a}\geq ۰ \xrightarrow{a<۰} a+۲\leq ۰ \to a\leq -۲$$

۱۱ - گزینه ۴

اگر $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه:

$$S=x'+x''=-\frac{b}{a}\ ,\ \ d=|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\begin{cases} x'=x''+۲ \\ x'+x''=-\frac{b}{a}=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'-x''=۲ \\ x'+x''=۵ \end{cases} \Rightarrow x'=\frac{۷}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳(\frac{۴۹}{۴})-۱۵(\frac{۷}{۲})+m=۰ \Rightarrow ۱۴۷-۲۱۰+۴m=۰ \Rightarrow -۶۳+۴m=۰ \Rightarrow m=\frac{۶۳}{۴}$$

راه حل دوم:

$$|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲۲۵-۱۲m}}{۳}=۲ \Rightarrow \sqrt{۲۲۵-۱۲m}=۶$$

$$\Rightarrow ۲۲۵-۱۲m=۳۶ \Rightarrow m=\frac{۶۳}{۴}$$

۱۲ - گزینه ۱ معادله دو ریشه منفی دارد بنابراین $\Delta>۰\ ,\ \frac{c}{a}>۰$ و $S<۰$ است.

$$f(x)=ax^۲+(a+۳)x-۱$$

$$\begin{cases} \Delta>۰ \Rightarrow (a+۳)^۲-۴(-۱)(a)=a^۲+۱۰a+۹>۰ \Rightarrow a>-۱ \ \text{یا}\ \ a<-۹ \\ \frac{c}{a}>۰ \Rightarrow \frac{-۱}{a}>۰ \Rightarrow a<۰ \\ S<۰ \Rightarrow -\frac{a+۳}{a}<۰ \xrightarrow{a<۰} a+۳<۰ \Rightarrow a<-۳ \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های سه شرط: $a<-۹$

۱۳ - گزینه ۲ توجه: شرط اینکه تابع $y=ax^۲+bx+c$ همواره بالای محور $x$ها قرار گیرد $\Delta<۰$ و $a>۰$ است.

می‌دانیم وقتی $y_۱=۲x^۲+۳x$ بالای $y_۲=mx^۲+m+۲$ قرار دارد که $۲x^۲+۳x>mx^۲+m+۲$ و در نتیجه $(۲-m)x^۲+۳x-(m+۲)>۰$ باید برقرار باشد. پس کافی است در این عبارت باید $\Delta<۰$ و ضریب $x^۲$ مثبت باشد:

$$\begin{cases} \Delta=۹-۴(m^۲-۴)=-۴m^۲+۲۵<۰ \Rightarrow m^۲>\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow |m|>\frac{۵}{۲} \Rightarrow m<\frac{-۵}{۲} \quad \text{یا} \quad m>\frac{۵}{۲} \\ a>۰ \Rightarrow ۲-m>۰ \Rightarrow m<۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}} m<\frac{-۵}{۲}$$

۱۴ - گزینه ۲

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور $x$ها باشد، آن است که: $a<۰$ و $\Delta<۰$

$$a<۰ \Rightarrow ۱-m<۰ \Rightarrow m>۱ \quad (I)$$

$$\Delta<۰ \xrightarrow{b^۲-۴ac<۰} ۴(m-۳)^۲-۴(۱-m)(-۱)<۰ \xrightarrow{\div ۴} (m-۳)^۲+(۱-m)<۰$$

$$\Rightarrow m^۲-۶m+۹+۱-m<۰ \Rightarrow m^۲-۷m+۱۰<۰ \Rightarrow (m-۲)(m-۵)<۰ \Rightarrow ۲<m<۵ \quad (II)$$

از اشتراک $I$ و $II$ به جواب $۲<m<۵$ می‌رسیم.

۱۵ - گزینه ۴

معادله‌ی حاصل از تلاقی دو منحنی ریشه ندارد.

$$(۲x+۱)(x+۸)=mx \Rightarrow ۲x^۲+۱۶x+x+۸=mx \Rightarrow ۲x^۲+(۱۷-m)x+۸=۰$$

$$\Delta<۰ \Rightarrow (۱۷-m)^۲-۶۴<۰ \Rightarrow |m-۱۷|<۸ \Rightarrow -۸<m-۱۷<۸ \Rightarrow ۹<m<۲۵$$

۱۶ - گزینه ۳ ریشه‌های معادله‌ی داده شده را $\alpha$ و $\beta$ در نظر می‌گیریم و طبق فرض $\alpha=۲\beta$ است.

می‌دانیم: $\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a} \to ۲\beta^۲=\frac{۹}{۲} \to \beta^۲=\frac{۹}{۴} \to \beta=\pm\frac{۳}{۲} \xrightarrow[\text{مثبت هستند}]{\text{طبق فرض، ریشه‌ها}} \beta=\frac{۳}{۲}\ ,\ \ \alpha=۳$

$$\alpha+\beta=۳+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۱۷ - گزینه ۲ توجه: چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره بالای محور $x$ها قرار دارد. هرگاه $\begin{cases} a>۰ \\ \Delta<۰ \end{cases}$ باشد.

$$\begin{cases} ۱-a>۰ \to a<۱ \quad (۱) \\ \Delta<۰ \to ۲۴+۴a(۱-a)<۰ \to ۴a^۲-۴a-۲۴>۰ \to a^۲-a-۶>۰ \\ \to (a-۳)(a+۲)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a<-۲ \quad \text{یا} \quad a>۳ \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۱)\cap(۲)=a<-۲$$

**۱۸ - گزینه ۳** برای اینکه یک معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز باشد باید $\Delta>۰$ باشد بنابراین:

$$\Delta>۰ \to b^۲-۴ac>۰ \to ۳۶-۴(۲m-۱)(m-۲)>۰ \to ۹-(۲m^۲-۴m-m+۲)>۰$$

$$\to ۲m^۲-۵m-۷<۰ \to (m+۱)(۲m-۷)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱<m<۳/۵$$

درضمن ضریب $x^۲$ نباید صفر باشد یعنی $m\neq\frac{۱}{۲}$ است.

$$\text{جواب}=-۱<m<۳/۵-\left\{\frac{۱}{۲}\right\}$$

**۱۹ - گزینه ۳**

عبارت درجه‌ی دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ همواره منفی است هرگاه $a<۰$ و $\Delta<۰$ باشد.

باید $\Delta<۰$ و ضریب $x^۲$ منفی باشد.

$$a-۱<۰ \to a<۱$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(a-۱)^۲-۴(a-۱)<۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۵)<۰ \xrightarrow{a-۱<۰} a-۵>۰$$

$$a>۵, a<۱ \Rightarrow a\in\varnothing$$

**۲۰ - گزینه ۲**

اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \ , \ \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$$

در اینگونه تست‌ها ابتدا با توجه به صورت سوال رابطه‌ای بین $x_۱$ و $x_۲$ می‌نویسیم و سپس یک رابطه‌ی دیگر بین $x_۱$ و $x_۲$ از خود معادله می‌یابیم:

$$x_۱=۳x_۲+۳ \Rightarrow \begin{cases} x_۱-۳x_۲=۳ \\ x_۱+x_۲=\frac{۱۷}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_۱+۳x_۲=-۳ \\ x_۱+x_۲=\frac{۱۷}{۳} \end{cases}$$

$$۴x_۲=\frac{۸}{۳} \Rightarrow x_۲=\frac{۲}{۳}$$

$$f(\frac{۲}{۳})=۰ \Rightarrow ۳\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲-۱۷\left(\frac{۲}{۳}\right)+m=۰ \Rightarrow m=۱۰$$

**۲۱ - گزینه ۲**

اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \ , \ P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$$

با مرتب کردن معادلهٔ داده شده به معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۱=۰$ می‌رسیم. بنابراین:

$$S=\alpha+\beta=\frac{۳}{۲} \ , \ P=\alpha\cdot\beta=-\frac{۱}{۲}$$

هم چنین اگر $S$ و $P$ به ترتیب حاصل جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها باشند، معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ نوشت.

ریشه‌های معادلهٔ $۸x^۲+kx-۱=۰$ و $\alpha^۲\beta\cdot\alpha\beta^۲$ هستند، داریم:

$$S'=\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲=\alpha\beta(\alpha+\beta)=P\cdot S=\frac{۳}{۲}\cdot(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۳}{۴}$$

$$P'=\alpha^۲\beta\times\alpha\beta^۲=\alpha^۳\beta^۳=(\alpha\beta)^۳=P^۳=(-\frac{۱}{۲})^۳=-\frac{۱}{۸}$$

بنابراین معادلهٔ متناظر به صورت $x^۲+\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۸}=۰$ می‌باشد. با ضرب طرفین معادله در عدد ۸، این معادله به صورت $۸x^۲+۶x-۱=۰$ درمی‌آید و لذا $k=۶$ است.

**۲۲ - گزینه ۳**

روش اول: ریشه‌های معادله‌ی جدید از معکوس ریشه‌های معادله‌ی قبلی یک واحد بیشتر است.

$$۲x^۲-۳x-۴=۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها معکوس شده}} -۴x^۲-۳x+۲=۰ \xrightarrow{\text{یک واحد به ریشه‌ها اضافه شده}} -۴(x-۱)^۲-۳(x-۱)+۲=۰$$

$$-۴x^۲+۸x-۴-۳x+۳+۲=۰ \to -۴x^۲+۵x+۱=۰ \to ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

روش دوم:

$$\alpha+\beta=\frac{۳}{۲},\alpha\beta=-۲\ \ ,\ \ \alpha'=\frac{۱}{\alpha}+۱\ \ ,\ \ \beta'=\frac{۱}{\beta}+۱$$

$$S'=\alpha'+\beta'=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=\frac{۵}{۴}$$

$$P'=\alpha'\beta'=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱=-\frac{۱}{۴}$$

$$x^۲-S'x+P'=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

۲۳ - گزینه ۴ توجه: شرط اینکه نمودار تابع درجه‌ی ۲ همواره بالای محور $x$ها قرار گیرد. (همواره مثبت باشد): $\begin{cases}\Delta<۰\\ a>۰\end{cases}$

$$y=(m+۲)x^۲-۲mx+۱$$

$$\begin{cases}a=m+۲>۰\to m>-۲\ \ I\\ \Delta=۴m^۲-۴(m+۲)<۰\to ۴m^۲-۴m-۸<۰\end{cases}$$

$$m^۲-m-۲<۰\Rightarrow\begin{cases}m_۱=-۱\\ m_۲=-\frac{c}{a}=۲\end{cases}\Rightarrow$$

| m | | −۱ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Δ | + | ۰ | − | ۰ | + |

در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a+c=b$ باشد، آنگاه:

$$x_۱=-۱\ \ ,\ \ x_۲=-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow -۱<m<۲\ \ II$$

$$I\cap II\Rightarrow -۱<m<۲$$

۲۴ - گزینه ۴ شرط وجود دو ریشه‌ی مثبت در معادله‌ی درجه دوم این است که:

$$\begin{cases}\Delta>۰\to ۴(a-۲)^۲-۴(۱۴-a)>۰\to a^۲-۳a-۱۰>۰\\ S=-\frac{b}{a}>۰\to S=-\frac{-۲(a-۲)}{۱}>۰\to a>۲\quad(II)\\ P=\frac{c}{a}>۰\to P=\frac{c}{a}=\frac{۱۴-a}{۱}>۰\to a<۱۴\quad(III)\end{cases}$$

| | | −۲ | | ۵ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | | − | | + |
| | جواب | | | | جواب |

$(I)$

$$I\cap II\cap III\Rightarrow ۵<a<۱۴$$

توجه: در معادلهٔ درجهٔ دوم هرگاه $\frac{c}{a}$ منفی نباشد، باید شرط $\Delta>۰$ بررسی گردد و اگر $\frac{c}{a}<۰$ باشد، آنگاه معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد و نیاز به بررسی $\Delta>۰$ نیست.

۲۵ - گزینه ۳

محور $x$ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند به این معنی است که معادله فقط یک ریشه دارد و از آنجا که $x=۱$ ریشهٔ معادله است پس عبارت درجهٔ دوم ریشه ندارد.

$$x^۲-ax+a=۰\Rightarrow\Delta<۰\Rightarrow a^۲-۴a<۰\Rightarrow ۰<a<۴$$

توجه کنیم که $x=۱$ ریشهٔ عبارت درجهٔ دوم نیست.

۲۶ - گزینه ۴

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند آنگاه $x_۱,\frac{۱}{۸},x_۲$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند. لذا:

$$\frac{x_۱+x_۲}{۲}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow x_۱+x_۲=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۴}}\frac{۳}{m^۲-۴}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow m^۲=۱۶\Rightarrow m=\pm۴$$

باید $\Delta>۰$ باشد($x_۲,x_۱$ ریشه‌های حقیقی معادله‌اند.)

$$m=۴\Rightarrow ۱۲x^۲-۳x+۴=۰\Rightarrow\Delta=۹-۱۹۲<۰\to$$ غ ق ق

$$m=-۴\Rightarrow ۱۲x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow\frac{c}{a}<۰\Rightarrow\Delta>۰\to$$ ق ق

۲۷ - گزینه ۲ توجه: در معادلات درجهٔ دوم اگر ضریب $x(b)$ عددی زوج باشد می‌توان به جای $\Delta$ از $\Delta'$ استفاده نمود:

$$\Delta'=(\frac{b}{۲})^۲-a\cdot c$$

برای این که عبارت درجه دوم $ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد، باید $a>۰$ و $\Delta<۰(\Delta'<۰)$ بنابراین داریم:

$$\begin{cases}m-۱>۰\Rightarrow m>۱\quad(I)\\ \Delta'<۰\Rightarrow ۹-(m-۱)(۲m+۱)<۰\Rightarrow ۹-۲m^۲+m+۱<۰\Rightarrow ۲m^۲-m-۱۰>۰\\ \Rightarrow(۲m-۵)(m+۲)>۰\Rightarrow m<-۲\ \ or\ \ m>\frac{۵}{۲}(II)\end{cases}$$

از اشتراک روابط $(I)$ و $(II)$، $m>\frac{۵}{۲}$، یا $m>۲٫۵$ به دست می‌آید.

۲۸ - گزینه ۴

مطابق صورت سؤال، چون گفته محور $x$ها را در دو نقطه به طول منفی قطع می‌کند، یعنی معادله دو ریشه‌ی منفی دارد. پس باید سه شرط $\Delta > 0$ (زیرا دو ریشه دارد) و $\frac{c}{a} > 0$ (ضرب دو عدد منفی، مثبت است) و $-\frac{b}{a} < 0$ (جمع دو عدد منفی، منفی است) را لحاظ کنیم.

$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12 = 0$$
$$\Delta > 0 \to b^2 - 4ac > 0 \to (-2(m+1))^2 - 4(m-2)(12) > 0$$
$$\to 4(m^2 + 2m + 1 - 12m + 24) > 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}} (m^2 - 10m + 25) > 0 \to (m-5)^2 > 0$$
$$\to m \in R - \{5\}$$
$$\frac{c}{a} > 0 \to \frac{12}{m-2} > 0 \to m - 2 > 0 \to m > 2 \quad (1)$$
$$-\frac{b}{a} < 0 \to \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \xrightarrow{m-2>0} m + 1 < 0 \to m < -1 \quad (2)$$
$$1 \cap 2 \to \varnothing$$

توجه کنید که چون $\frac{c}{a} > 0$ است باید شرط $\Delta > 0$ بررسی گردد و اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، آنگاه معادله دو ریشه دارد و نیازی به بررسی $\Delta > 0$ نیست.

۲۹ - گزینه ۱

یعنی این معادله‌ی درجه دوم باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد.

$$x_1 x_2 < 0 \to \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 1$$

توجه کنید که چون $\frac{c}{a} < 0$ است، معادله قطعاً دو ریشهٔ حقیقی دارد. پس $\Delta > 0$ بررسی نمی‌گردد.

۳۰ - گزینه ۴ می‌دانیم که در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع جذر هر دو ریشه برابر است با:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \quad , \quad S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

پس:

$$2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{2} \quad , \quad P = \frac{c}{a} = \frac{1}{16}$$
$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \to m = 6$$

۳۱ - گزینه ۳ اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \ , \ \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

می‌توانیم معادلهٔ داده شده را حل کنیم و ریشه‌های آن را به سادگی به دست آوریم:

$$5x^2 + 3x = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow a + c = b \begin{cases} x_1 = \alpha = -1 \\ x_2 = \beta = \frac{-c}{a} = \frac{2}{5} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} = 1 \\ \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4} \\ P = \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$
$$x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 29x + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

۳۲ - گزینه ۱

عبارت درجهٔ دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ همواره در زیر محور $x$ها است هرگاه $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

$$(1) \ \ m - 1 < 0 \to m < 1$$
$$\Delta < 0 \to -4m^2 + 4m + 3 < 0 \to 4m^2 - 4m - 3 > 0$$
$$\Delta = 16 + 48 = 64 \to m = \frac{4 \pm 8}{8} \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2} \ , \ m_2 = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -\frac{1}{2} \text{ یا } m > \frac{3}{2} \ (2)$$
$$\to (1) \cap (2) \Rightarrow m < \frac{-1}{2}$$

۳۳ - گزینه ۳

هرگاه نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ رو به بالا است $a > 0$ است و چون بر محور $x$ها مماس است $\Delta = 0$ است و معادله ریشهٔ مضاعف دارد.

شرط اول $a > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$

شرط دوم $\Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4(m-2)(m+2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ 9 - 4(m^2 - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4m^2 + 25 = 0 \Rightarrow m = \pm\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5}{2}$$

۳۴ - گزینه ۳ توجه: اگر ضریب $x(b)$ زوج باشد برای راحتی می‌توان بجای $\Delta$ از $\Delta'$ استفاده نمود.

باید معادلهٔ $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت باشد.

$$\Delta' = (\frac{b}{۲})^۲ - a \cdot c$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta' > ۰ \Rightarrow ۴ - ۲(m-۳) > ۰ \Rightarrow ۱۰ > ۲m \Rightarrow m < ۵ \\ \text{ضرب دو ریشه مثبت است} \quad \Rightarrow \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow m - ۳ > ۰ \Rightarrow m > ۳ \\ \text{جمع دو ریشه مثبت است} \quad \Rightarrow -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow ۲ > ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} ۳ < m < ۵$$

**۳۵ - گزینه ۲** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

با فرض این که $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادله باشند، رابطهٔ $x' = \frac{x''}{۲} + ۵$ بین آنها برقرار است.

$$x^۲ - ۸x + m = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = x' + x'' = ۸ \Rightarrow \frac{۳x''}{۲} + ۵ = ۸ \Rightarrow \frac{۳x''}{۲} = ۳ \Rightarrow x'' = ۲ \Rightarrow x' = \frac{۲}{۲} + ۵ = ۶ \\ P = x'x'' = m \Rightarrow ۶ \times ۲ = m \Rightarrow m = ۱۲ \end{cases}$$

**۳۶ - گزینه ۳** می‌دانیم تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ همواره بالای محور $x$ها قرار دارد، اگر $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد داریم:

$$\begin{cases} a - ۱ > ۰ \Rightarrow a > ۱ \quad (I) \\ \Delta < ۰ \Rightarrow (۲\sqrt{۲})^۲ - ۴(a-۱)(a) < ۰ \Rightarrow ۸ - ۴a^۲ + ۴a < ۰ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ > ۰ \\ \Rightarrow a > ۲ \ \text{یا} \ a < -۱ \quad (II) \end{cases}$$

| $a$ | | $-۱$ | | $۲$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | $+$ | $۰$ | $-$ | $۰$ | $+$ |

$$(I) \cap (II) \Rightarrow a > ۲$$

**۳۷ - گزینه ۱**

$$(m-۲)x^۲ + ۲mx > ۱ \Rightarrow (m-۲)x^۲ + ۲mx - ۱ > ۰$$

شرط آنکه سه جمله‌ای درجه دوم $ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت باشد $\Delta < ۰$ , $a > ۰$ است. در این پرسش خواهیم داشت:

$$\begin{cases} m - ۲ > ۰ \\ ۴m^۲ + ۴(m-۲) < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - ۲ > ۰ \\ ۴(m+۲)(m-۱) < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > ۲ \\ -۲ < m < ۱ \end{cases}$$

دو نامساوی جواب مشترک ندارند پس هیچ مقدار $m$

**۳۸ - گزینه ۳** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

با توجه به معادلهٔ داده شده داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۳ \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} \Rightarrow k^۲ = \beta + \alpha + ۲\sqrt{\alpha\beta} = ۳ + ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۴ \Rightarrow k = ۲$$

$$A = \frac{۱}{\sqrt{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{۲}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}} = ۴$$

**۳۹ - گزینه ۳**

می‌دانیم: اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم باشد آنگاه:

$$\alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳P \cdot S$$

فرض کنیم $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۸x^۲ - mx - ۸ = ۰$ و $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - x - ۲ = ۰$ باشند.

$$x_۱ = \alpha^۳ \quad , \quad x_۲ = \beta^۳ \qquad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۱$$

$$x_۱ + x_۲ = \alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳PS = \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۲} = \frac{۱۳}{۸}$$

$$x_۱ x_۲ = \alpha^۳\beta^۳ = (\alpha\beta)^۳ = -۱$$

$$x^۲ - \frac{۱۳}{۸}x - ۱ = ۰ \rightarrow ۸x^۲ - ۱۳x - ۸ = ۰ \rightarrow m = ۱۳$$

توجه: معادلهٔ درجهٔ دومی که جمع ریشه‌ها $S$ و ضرب ریشه‌ها $P$ باشد بصورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ است.