پاسخنامه تشریحی

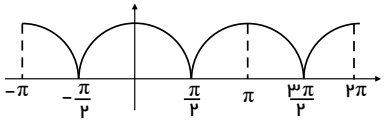
۱ - گزینه ۱ در جمع چند قدر مطلق، برای محاسبه‌ی کمترین مقدار، ریشه‌ی هر قدر مطلق را در عبارت قرار می‌دهیم. کوچکترین عبارت ایجاد شده، مینیمم این تابع است و اینگونه توابع بیشترین مقدار ندارند و بردشان برابر است با: $R_f = [Min\ , +\infty)$

$$f(x) = ۲\,|x-۱| + |۳x+۶| + |\frac{۱}{۲}x - ۱|$$

$$\left.\begin{array}{l} f(۱) = ۰ + ۹ + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۹}{۲} \\ f(-۲) = ۶ + ۰ + ۲ = ۸ \\ f(۲) = ۲ + ۱۲ + ۰ = ۱۴ \end{array}\right\} \Rightarrow y_{\min} = ۸$$

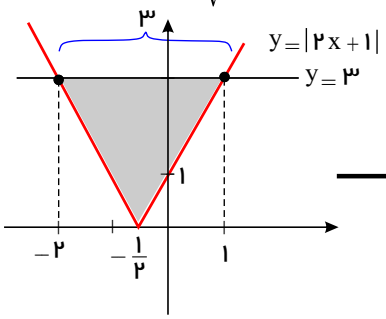
۲ - گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. یعنی $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم و سپس قرینه‌ی قسمت پایین را نسبت به محور xها در بالا رسم می‌کنیم.

بنابراین در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۲}, \pi)$ تابع صعودی است.



۳ - گزینه ۳

$$gof(x) = g\,(f(x)) = \sqrt{۴(x^۲ + x) + ۱} = \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱} = \sqrt{(۲x+۱)^۲} = |۲x+۱|$$



$$S = \frac{۳ \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴٫۵$$

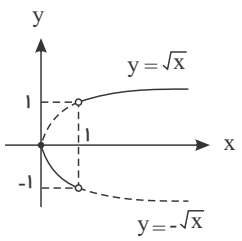
دقت کنید که نقاطی به طولهای $x = ۱$ و $x = -۲$ از تلاقی تابع $y = |۲x+۱|$ با خط $y = ۳$ بدست آمده‌اند.

$$|۲x+۱| = ۳ \rightarrow \begin{cases} ۲x + ۱ = ۳ \rightarrow ۲x = ۲ \rightarrow x = ۱ \\ ۲x + ۱ = -۳ \rightarrow ۲x = -۴ \rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

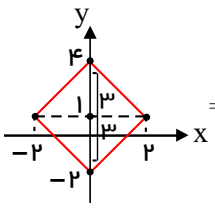
۴ - گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-۱)\sqrt{x}}{x-۱} & x > ۱ \\ \dfrac{-(x-۱)\sqrt{x}}{x-۱} & ۰ \le x < ۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > ۱ \\ -\sqrt{x} & ۰ \le x < ۱ \end{cases}$$

بنابراین، نمودار تابع به شکل زیر است:



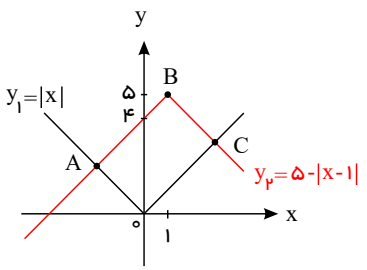
۵ - گزینه ۴ معادله‌ی $|x| + |y-۱| = ۳$ بیانگر مربعی به مبدأ $(۰, ۱)$ و طول قطر $۲ \times ۳ = ۶$ می‌باشد. می دانیم مساحت مربع برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر.



$$\Rightarrow S = \frac{۶ \times ۶}{۲} = ۱۸$$

۶ ـ گزینه ۴

ابتدا نمودار این دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم تا شکل ناحیهٔ محدود مشخص شود.



با توجه به شکل، ناحیهٔ محدود به دو تابع یک مستطیل است که برای محاسبهٔ مساحت آن باید ابتدا نقاط برخورد آن‌ها را بیابیم:

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow |x| = ۵ - |x - ۱|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C \text{ نقطهٔ } \xrightarrow{x>۱} x = ۵ - (x - ۱) \to x = ۳ \Rightarrow C(۳, ۳) \\ A \text{ نقطهٔ } \xrightarrow{x<۰} -x = ۵ + (x - ۱) \to x = -۲ \Rightarrow A(-۲, -۲) \end{cases}$$

$$OC = \sqrt{(۳)^۲ + (۳)^۲} = \sqrt{۱۸}, OA = \sqrt{(-۲)^۲ + (-۲)^۲} = \sqrt{۸}$$

$$S = \text{عرض} \times \text{طول} = \sqrt{۱۸} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

۷ ـ گزینه ۳

$$f(x) = ۴ - |x - ۲| - |x|$$

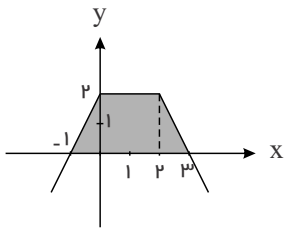
$x < ۰ \Rightarrow f(x) = ۴ + x - ۲ + x = ۲x + ۲$

x	۰	-۱
y	۲	۰

$۰ \le x < ۲ \Rightarrow f(x) = ۴ + x - ۲ - x = ۲$

$x \ge ۲ \Rightarrow f(x) = ۴ - (x - ۲) - x = -۲x + ۶$

x	۲	۳
y	۲	۰



$$S = \frac{(۲ + ۴) \times ۲}{۲} = ۶$$

۸ ـ گزینه ۱

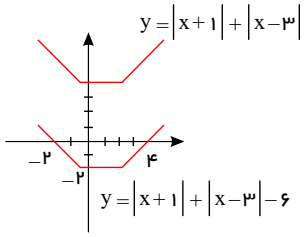
ابتدا ریشه‌های داخل قدر مطلق را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I)\ x < -۱ \Rightarrow y = \sqrt{-(x + ۱) - (x - ۳) - ۶} \Rightarrow y = \sqrt{-۲x - ۴} \Rightarrow -۲x - ۴ \ge ۰ \Rightarrow x \le -۲ \\ II)\ -۱ < x < ۳ \Rightarrow y = \sqrt{(x + ۱) - (x - ۳) - ۶} \Rightarrow y = \sqrt{-۲} \text{ غ ق ق} \\ III)\ x > ۳ \Rightarrow y = \sqrt{x + ۱ + x - ۳ - ۶} \Rightarrow y = \sqrt{۲x - ۸} \Rightarrow ۲x - ۸ \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۴ \\ IV)\ x = -۱ \Rightarrow y = \sqrt{-۲} \text{ غ ق ق} \\ V)\ x = ۳ \Rightarrow y = \sqrt{-۲} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ از ۵ مورد بالا اشتراک می‌گیریم $\Rightarrow D = \mathbb{R} - (-۲, ۴)$

روش دوم: هندسی: تابع $y = |x + ۱| + |x - ۳|$ یک نمودار گلدانی به‌صورت زیر است:



$$D = (-\infty, -۲] \cup [۴, +\infty)$$

۹ ـ گزینه ۳

می‌دانیم که برای محاسبهٔ دامنهٔ رادیکال فرجهٔ زوج باید زیر رادیکال را نامنفی کنیم.

ابتدا ریشهٔ داخل قدرمطلق را بدست می‌آوریم:

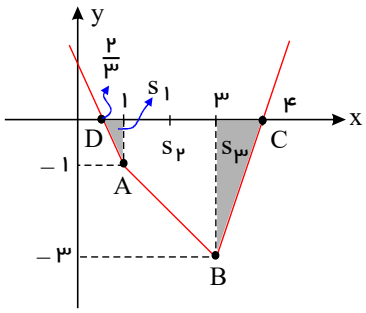
$$x + ۱ = ۰ \to x = -۱$$

$$y=\sqrt{|x+۱|+x-۳}$$

$$|x+۱|\geq -x+۳ \Rightarrow \begin{cases} x\geq -۱ \Rightarrow ۲x\geq ۲ \Rightarrow x\geq ۱ \\ x<-۱ \Rightarrow -۱\geq ۳ \Rightarrow \varnothing \end{cases}$$

پس دامنهٔ تابع برابر $[۱,+\infty)$ است.

۱۰ - گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع $y=|x-۱|+۲|x-۳|-۵$ را رسم می‌کنیم.



$$y=\begin{cases} -۳x+۲ & x<۱ \\ -x & ۱\leq x\leq ۳ \\ ۳x-۱۲ & x>۳ \end{cases}$$

$$-۳x+۲=۰ \rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

$$S=S_۱+S_۲+S_۳=\frac{۱\times\frac{۱}{۳}}{۲}+\frac{(۱+۳)\times ۲}{۲}+\frac{۱\times ۳}{۲}$$

$$S=\frac{۱}{۶}+۴+\frac{۳}{۲}=\frac{۱+۲۴+۹}{۶}=\frac{۳۴}{۶}=۵/\bar{۶}$$

۱۱ - گزینه ۳ نمودار دو تابع $f(x)=|x+۱|+|x+۴|$ و $y=-x$ را رسم کرده و نقاط تقاطع آن‌ها را می‌یابیم.

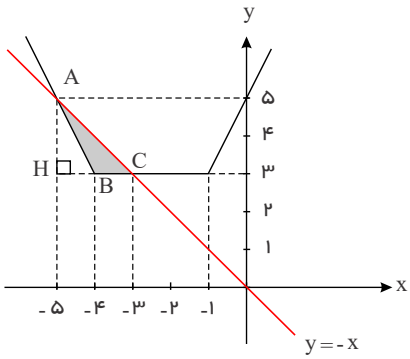
$$x<-۴ \Rightarrow f(x)=-x-۱-x-۴=-۲x-۵$$

x	-۴	-۵
y	۳	۵

$$-۴\leq x<-۱ \Rightarrow f(x)=-x-۱+x+۴=۳$$

$$x\geq -۱ \Rightarrow f(x)=x+۱+x+۴=۲x+۵$$

x	-۱	۰
y	۳	۵



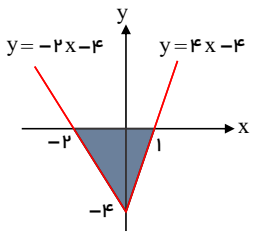
با توجه به شکل مشخص می‌شود که خط $y=-x$ نمودار f را در نقاط $C(-۳,۳)$ و $A(-۵,۵)$ قطع می‌کند؛ پس داریم:

$$BC=۱\ ,\ AH=۲ \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\cdot BC=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱=۱$$

۱۲ - گزینه ۳

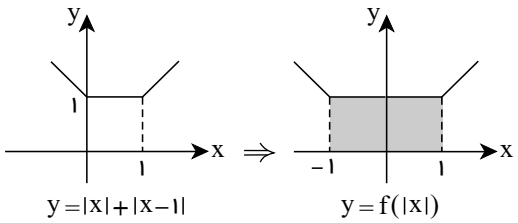
$$y=۳|x|+x-۴ \Rightarrow y=\begin{cases} ۳(x)+x-۴=۴x-۴ & x\geq ۰ \\ ۳(-x)+x-۴=-۲x-۴ & x<۰ \end{cases}$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}\Rightarrow \text{مساحت}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳=۶$$



۱۳ - گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع گلدانی $y=|x|+|x-۱|$ را رسم می‌کنیم و برای رسم $f(|x|)$ باید آن قسمت از نمودار تابع که در سمت چپ محور yها قرار دارد حذف شود و سپس قرینه‌ی سمت راست را به چپ انتقال می‌دهیم.

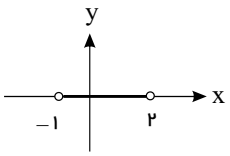
$$\text{مساحت هاشورزده}=S=\text{عرض}\times\text{طول}=۱\times ۲=۲$$



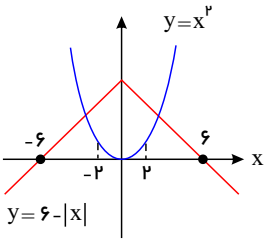
۱۲ - گزینه ۳ ابتدا باتوجه به مفهوم قدر مطلق، ضابطه y را ساده می‌کنیم

$$y=\frac{|f(x)|+f(x)}{|f(x)|-f(x)}=\begin{cases} f(x)\geq ۰ \Rightarrow y=\frac{f+f}{f-f}=\frac{۲f}{۰}=\text{تعریف نشده} \\ f(x)<۰ \Rightarrow y=\frac{-f+f}{-f-f}=\frac{۰}{-۲f}=۰ \end{cases}$$

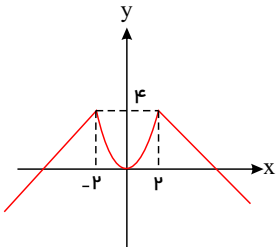
پس نمودار تابع y، همواره برابر صفر است. اما در بازه یا بازه‌هایی که به ازای xهای آن یعنی بازه‌ای که نمودار $f(x)$ زیر محور xها قرار دارد که برابر است با $(-۱,۲)$ در نتیجه: $-۱<x<۲$ و $y=۰$ و نمودار آن بصورت زیر است.



۱۵ - گزینه ۳ ابتدا هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و سپس قسمتهایی که بالاتر قرار می‌گیرند را حذف می‌کنیم.



$$\Rightarrow y = \min\left\{x^{۲}\ ,\ ۶ - |x|\right\}$$



با توجه به نمودار تابع $y = \min\left\{x^{۲}\ ,\ ۶ - |x|\right\}$ ، مقدار ماکزیمم تابع عدد ۴ است.

۱۶ - گزینه ۴ در تابع قدرمطلقی $f(x) = |x + a| - b$ نقطهٔ حاصل از ریشهٔ داخل قدرمطلق نقطه‌ای است که نمودار در آن نقطه شکسته می‌شود، پس داریم:

$$x + a = ۰ \Rightarrow x = -a \Rightarrow f(-a) = -۱ \Rightarrow -b = -۱ \Rightarrow b = ۱$$

باتوجه به شکل $-a > ۰$، پس $a < ۰$ و داریم:

$$f(x) = |x + a| - ۱\ ,\ f(۵) = ۰ \Rightarrow |۵ + a| - ۱ = ۰ \Rightarrow |۵ + a| = ۱ \Rightarrow ۵ + a = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} a = -۶ \\ a = -۴ \end{cases}$$

باتوجه به شکل $-a < ۵$ پس $a > -۵$ درنتیجه $a = -۴$ قابل‌قبول است.

$$f(x) = |x - ۴| - ۱ \Rightarrow c = f(۰) = ۳ \Rightarrow f(c) = f(۳) = |۳ - ۴| - ۱ = ۰$$

۱۷ - گزینه ۱

$$f(x) = |x| + a \xrightarrow{x \in (۰\ ,\ ۱)} f(x) = x + a$$

$$g(x) = b|x - ۱| + ۲ \xrightarrow{x \in (۰\ ,\ ۱)} g(x) = b(۱ - x) + ۲ \Rightarrow g(x) = -bx + b + ۲$$

$f(x)$ و $g(x)$ منطبق بر یکدیگر می‌باشند، در نتیجه:

$$-bx + (b + ۲) = x + a \Rightarrow -bx = x \Rightarrow b = -۱$$

$$b + ۲ = a \Rightarrow -۱ + ۲ = a \Rightarrow a = ۱$$

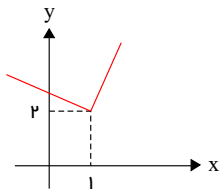
۱۸ - گزینه ۳

مقدار a ، باید عددی باشد که با تعیین علامت کردن قدر مطلق، دو خط با شیب‌های مختلف ایجاد شود تا تابع غیر یکنوا شود. دو گزینه را می‌نویسیم و بقیه گزینه‌ها را می‌توانید به راحتی بررسی کنید.

$$a = ۳ \Rightarrow y = ۲x + ۳\,|x - ۱| = \begin{cases} ۵x - ۳ & x \geq ۱ \\ -x + ۳ & x < ۱ \end{cases}$$

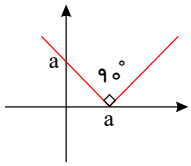
شیب‌ها مختلف العلامه هستند پس غیر یکنواست

$$a = ۱ \Rightarrow y = ۲x + |x - ۱| = \begin{cases} x + ۱ & x < ۱ \\ ۳x - ۱ & x \geq ۱ \end{cases}$$



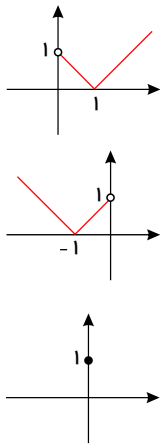
شیب این دو خط هم علامت است و یکنوا است.

۱۹ - گزینه ۳ می‌دانیم: نمودار تابع $y = |x - a|$ به صورت زیر است:

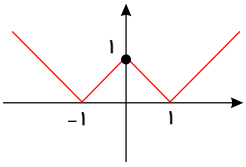


برای رسم تابع $f(x)$ ، ابتدا ضابطه‌ی تابع را به این صورت می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}\left|x-\frac{x}{x}\right| & x>0\\ \left|x-\frac{x}{-x}\right| & x<0\\ 1 & x=0\end{cases}\Longrightarrow y=\begin{cases}|x-1| & x>0 \Longrightarrow\\ |x+1| & x<0 \Longrightarrow\\ 1 & x=0 \Longrightarrow\end{cases}$$



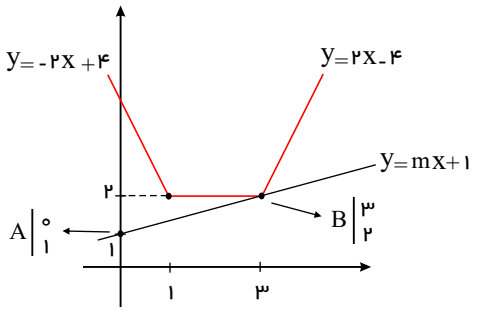
حال هر سه نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌ها را مشخص کنیم.



همان‌طور که مشخص است پاره‌خط‌ها وترهای دو مثلث ایجاد شده هستند که طول هر ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۱ واحد است پس طول وتر (پاره‌خط) $\sqrt{2}$ می‌باشد که جمع هر دو برابر $2\sqrt{2}$ است.

۲۰ - گزینه ۲

ابتدا نمودار گلدانی $y=|x-1|+|x-3|$ را رسم می‌کنیم.



برای اینکه خط مایل $y=mx+1$ کوچکتر یا مساوی نمودار گلدانی باشد باید از نقاط $A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$ عبور کند.

معادلهٔ خط: $m=\frac{2-1}{3-0}=\frac{1}{3}\Rightarrow y-1=\frac{1}{3}\cdot(x-0)\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}x+1}$

بنابراین حداکثر مقدار m باید عدد $\frac{1}{3}$ باشد.

۲۱ - گزینه ۴ ابتدا عبارت قدر مطلقی را تعیین علامت نموده و بصورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم.

$y=|2x-6|-|x+4|+x$

اعداد $x=3$ و $x=-4$ ریشه‌های قدر مطلق هستند بنابراین داریم:

$x>3\rightarrow y=2x-6-x-4+x=2x-10\rightarrow$ صعودی اکید

$-4\le x\le 3\rightarrow y=-2x+6-x-4+x=-2x+2\rightarrow$ نزولی اکید

$x<-4\rightarrow y=-2x+6+x+4+x=10\rightarrow$ ثابت

تابع در بازه $(-4,3)$ تابع نزولی اکید است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می‌کنیم.

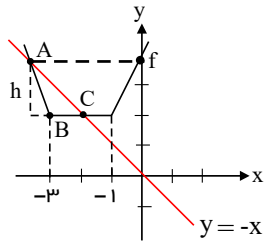
$$y=-2x+2\rightarrow y-2=-2x\rightarrow\frac{y-2}{-2}=x\Rightarrow\frac{x-2}{-2}=y\Rightarrow f^{-1}(x)=1-\frac{x}{2}$$

برای محاسبه‌ی دامنه تابع f^{-1} برد تابع $f(x)$ را می‌یابیم.

$$\begin{cases}y=-2x+2\\ -4\le x\le 3\end{cases}\rightarrow -6\le -2x\le 8\xrightarrow{+2}-4\le -2x+2\le 10\Rightarrow R_f=D_{f^{-1}}=[-4,10]$$

۲۲ - گزینه ۳ ابتدا تابع گلدانی و نیم‌ساز ناحیه دوم و چهارم را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases} x < -۳ \Rightarrow -x = -۲x - ۴ \Rightarrow x = -۴ \text{ ق ق} \rightarrow A \Big|^{-۴} \\ -۳ \le x \le -۱ \Rightarrow -x = ۲ \Rightarrow x = -۲ \text{ ق ق} \rightarrow C \Big|^{-۱} \\ x > -۱ \Rightarrow -x = ۲x + ۴ \Rightarrow x = \frac{-۴}{۳} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$



باتوجه به شکل، برای مساحت بین دو نمودار داریم:

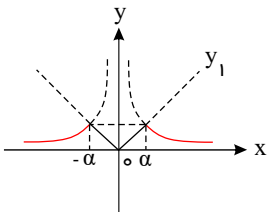
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{۲ \times ۱}{۲} = ۱$$

۲۳ - گزینه ۲ اگر نمودارهای دو تابع $y_۱ = |x|$ و $y_۲ = \frac{۴}{|x|}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، داریم:

از طرفی تابع f یک تابع زوج است. پس نمودار آن نسبت به محور yها متقارن است. بنابراین طبق شکل، ماکزیمم تابع برابر است با $f(\pm\alpha)$ (محل برخورد)

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow |x| = \frac{۴}{|x|} \Rightarrow |x|^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

$$\max\{f(x)\} = f(\pm ۲) = \min\{|\pm ۲| \cdot \frac{۴}{|\pm ۲|}\} = \min\{۲, ۲\} = ۲$$



۲۴ - گزینه ۳

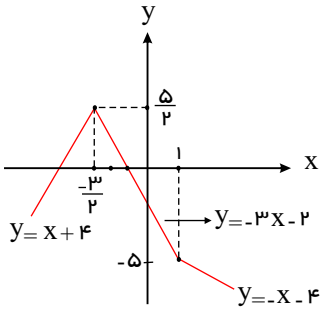
$$|۲x + ۳| + m = |x - ۱| \Rightarrow |x - ۱| - |۲x + ۳| = m$$

برای این که معادلهٔ $|x - ۱| - |۲x + ۳| = m$ دارای جواب باشد باید خط افقی $y = m$ بتواند نمودار تابع $y = |x - ۱| - |۲x + ۳|$ را حداقل یکبار قطع کند پس:

$$|x - ۱| - |۲x + ۳| = \begin{cases} -x - ۴ & x > ۱ \\ -۳x - ۲ - \frac{۳}{۲} \le x \le ۱ \\ x + ۴ & x < -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

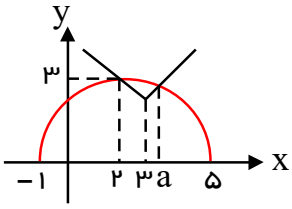
باتوجه به شکل باید خط افقی $y = m$ زیر نقطهٔ $y = \frac{۵}{۲}$ رسم شود بنابراین حداکثر مقدار m، $\frac{۵}{۲}$ است.



۲۵ - گزینه ۲ نمودار دو تابع را رسم می کنیم (به صورت تقریبی)

$y = \sqrt{۵ + ۴x - x^۲} = \sqrt{۹ - (x - ۲)^۲} \Rightarrow$ نیم دایره با مرکز $(۲, ۰)$ و شعاع ۳

$y = |x - ۳| + ۲ \Rightarrow$ رسم به وسیله انتقال



در $x = ۲$ مقدار هر دو تابع برابر است، بنابراین این دو تابع در این نقطه با هم برخورد دارند. با توجه به شکل جواب نامعادله ی خواسته شده بازه ی $(۲, a)$ است $(a > ۳)$. مقدار a را می توانیم از تقاطع تابع $\sqrt{۵ + ۴x - x^۲}$ با شاخه ی سمت راست تابع $|x - ۳| + ۲$ یعنی $x - ۱$ به دست آوریم.

$$\sqrt{۵ + ۴x - x^۲} = x - ۱ \Rightarrow ۵ + ۴x - x^۲ = x^۲ - ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۶x - ۴ = ۲(x^۲ - ۳x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳ + \sqrt{۱۷}}{۲} = a$$