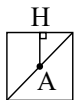


## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

فاصله‌ی وسط یک قطر مربع از یکی از اضلاع آن برابر نصف ضلع مربع است.



$$A \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}, x - 2y + 5 = 0 \rightarrow AH = \text{نصف ضلع مربع} = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$\text{مساحت مربع} = (\text{ضلع مربع})^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.

۲ - گزینه ۳

$$R = 3 \text{ شعاع دایره} \rightarrow \pi R^2 = 9\pi \rightarrow \text{مساحت دایره} = 9\pi$$

شعاع دایره ۳ است و چون دایره بر خط  $4y - 3x = k$  مماس است پس فاصله‌ی مرکز دایره تا خط  $4y - 3x = k$  برابر شعاع دایره یعنی ۳ است.

$$3x - 4y + k = 0, \text{ مرکز } O(-1, 2)$$

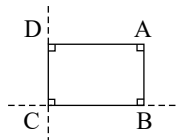
$$\rightarrow R = \frac{|3(-1) - 4(2) + k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \rightarrow \frac{|k - 11|}{5} = 3 \rightarrow |k - 11| = 15 \rightarrow \begin{cases} k - 11 = 15 \rightarrow k = 26 \\ k - 11 = -15 \rightarrow k = -4 \end{cases}$$

باتوجه به گزینه‌ها  $k = -4$  پاسخ است.

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.

۳ - گزینه ۲

$$2y + x = 6 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, \quad 2x - y = 7 \rightarrow m' = 2$$



چون شیب‌ها عکس و قرینه‌ی هم هستند این دو خط بر هم عمودند و نقطه‌ی  $A$  در معادله‌ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی‌کند پس می‌توان شکل را در این گونه در نظر گرفت.

برای یافتن طول و عرض مستطیل کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  را از این دو خط بدست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} A \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}, x + 2y - 6 = 0 \rightarrow AD = \frac{|8 + 10 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \\ A \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}, 2x - y - 7 = 0 \rightarrow AB = \frac{|16 - 5 - 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = AD \times AB = \frac{48}{5} = 9.6$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.

۴ - گزینه ۲ ابتدا باید معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  را بنویسیم.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{7 + 5}{-2 - 2} = \frac{12}{-4} = -3 \rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = \frac{1}{3}$$

$$AB \text{ وسط } M \begin{vmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{vmatrix} \rightarrow M \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

پس معادله‌ی عمودمنصف به صورت  $\frac{1}{3}(x - 0) + (y - 1) = 0$  یا  $x - 3y + 3 = 0$  است.

فاصله‌ی نقطه‌ی  $C$  از خط عمودمنصف برابر ضلع مربع است.

$$\left\{ \begin{array}{l} C \\ -2 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{|1 + 6 + 3|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{10}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

بنابراین مساحت مربع  $S = (\sqrt{10})^2 = 10$  است.

توجه کنید فاصله نقطه  $A \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می آید.

۵ - گزینه ۳ چون دایره بر دو خط مماس است، پس فاصله مرکز دایره با دو خط، مساوی و برابر شعاع دایره است:

$$O(2, 1), 3x + 4y - 5 = 0, -5x + 12y - a = 0$$

$$d_1 = \frac{|3(2) + 4(1) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

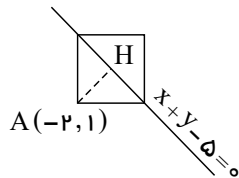
$$d_2 = \frac{|-5(2) + 12(1) - a|}{\sqrt{(-5)^2 + 12^2}} = \frac{|2 - a|}{\sqrt{169}} = \frac{|2 - a|}{13}$$

$$d_1 = d_2 \rightarrow \frac{|2 - a|}{13} = 1 \rightarrow |2 - a| = 13 \rightarrow \begin{cases} 2 - a = 13 \rightarrow 2 - 13 = a \rightarrow a = -11 \\ 2 - a = -13 \rightarrow 2 + 13 = a \rightarrow a = 15 \end{cases}$$

توجه کنید فاصله نقطه  $A \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می آید.

۶ - گزینه ۲

مختصات نقطه ی داده شده در معادله ی خط، صدق نمی کند پس نقطه ی  $A$  روی ضلع داده شده قرار ندارد.



$$AH = \frac{|-2 + 1 - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر} = 6\sqrt{2} (*)$$

$$24 = 4 \times 6 = \text{محیط} \Rightarrow 6 = \text{طول ضلع} \Rightarrow \sqrt{2}(\text{طول ضلع}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \times (\text{طول ضلع}) = 6\sqrt{2}$$

توجه کنید فاصله ی نقطه ی  $A \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$  از خط به معادله ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می آید.

۷ - گزینه ۱

هر نقطه روی نیمساز ناحیه ی اول و سوم  $(y = x)$  به صورت  $\left| \begin{array}{l} a \\ a \end{array} \right.$  می باشد. کافی است فاصله ی این نقطه را از خط به معادله ی  $x + 2y - 1 = 0$  بدست آوریم.

$$AH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \sqrt{5} = \frac{|a + 2a - 1|}{\sqrt{1 + 4}} \rightarrow 5 = |3a - 1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 1 = 5 \rightarrow a = 2 \rightarrow A \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right. \text{ و } B \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right. \rightarrow AB = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \\ 3a - 1 = -5 \rightarrow a = -\frac{4}{3} \rightarrow A \left| \begin{array}{l} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{array} \right. \text{ (چون روی نیمساز ناحیه ی سوم است)} \end{cases}$$

توجه کنید فاصله ی نقطه ی  $A \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$  از خط به معادله ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می آید.

۸ - گزینه ۳ مختصات نقاط روی خط  $y = x - 1$  به صورت  $\left| \begin{array}{l} \alpha \\ \alpha - 1 \end{array} \right.$  هستند حال، فاصله ی این نقاط را از خط به معادله ی  $2x + 3y - 6 = 0$  به دست آورده و برابر  $\sqrt{13}$  قرار می دهیم.

$$\frac{|2\alpha + 3(\alpha - 1) - 6|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|\alpha - 9|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \rightarrow |\alpha - 9| = 13$$

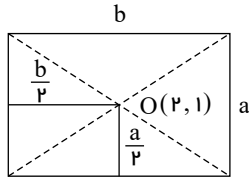
$$\rightarrow \begin{cases} \alpha - 9 = 13 \rightarrow \alpha = \frac{22}{1} \rightarrow \alpha - 1 = \frac{22}{1} - 1 = \frac{21}{1} \\ \alpha - 9 = -13 \rightarrow \alpha = -\frac{4}{1} \rightarrow \alpha - 1 = -\frac{4}{1} - 1 = -\frac{5}{1} \end{cases}$$

بنابراین مجموع عرض این دو نقطه برابر  $\frac{21}{1} - \frac{5}{1} = \frac{16}{1}$  است.

توجه کنید فاصله ی نقطه ی  $A \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$  از خط به معادله ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می آید.

۹ - گزینه ۲ دو ضلع داده شده با هم موازی نیستند چون شیب های برابر ندارند.

با توجه به شکل فرضی روبه‌رو، فاصله‌ی نقطه‌ی  $O$  از دو ضلع برابر نصف طول اضلاع مستطیل است، پس داریم:



فاصله‌ی نقطه‌ی  $O(2, 1)$  از ضلع  $3x + 4y = 1$ :

$$\begin{cases} O(2, 1) \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{|3(2) + 4(1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{9}{5} \Rightarrow b = \frac{18}{5}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی  $O(2, 1)$  از ضلع  $4x - 3y = 4$ :

$$\begin{cases} O(2, 1) \\ 4x - 3y = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{|4(2) - 3(1) - 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{5} \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

پس محیط مستطیل برابر است با:

$$P = 2(a + b) = 2\left(\frac{18}{5} + \frac{2}{5}\right) = 2\left(\frac{20}{5}\right) = \frac{40}{5} = 8$$

توجه کنید برای محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  استفاده می‌کنیم.

۱- گزینه ۴ دو نقطه روی خط  $y = 2 - x$  قرار دارند، پس می‌توانیم مختصات آن‌ها را به صورت  $\begin{vmatrix} \alpha \\ 2 - \alpha \end{vmatrix}$  نشان دهیم.

فاصله نقطه  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ 2 - \alpha \end{vmatrix}$  از خط  $0 = 3 - 3y - x$  به صورت زیر است:

$$\frac{|\alpha - 6 + 3\alpha - 3|}{\sqrt{1 + 9}} = \sqrt{10} \Rightarrow |4\alpha - 9| = 10 \Rightarrow 4\alpha - 9 = \pm 10 \Rightarrow \alpha = \frac{19}{4}, \alpha = \frac{-1}{4}$$

پس مختصات این نقاط  $\begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix}$  و  $\begin{vmatrix} 19 \\ 4 \end{vmatrix}$  هستند و فاصله آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{\left(\frac{19}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-11}{4} - \frac{9}{4}\right)^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

توجه کنید فاصله نقطه  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله  $0 = ax + by + c$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.

۱۱- گزینه ۲ نقطه  $M \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\alpha - 3 \end{vmatrix}$  را روی خط  $y = 2x - 3$  در نظر گرفته و فاصله آن را از خط  $0 = 5x + 2y - 11$  به دست می‌آوریم.

$$\frac{|5\alpha + 4\alpha - 6 - 11|}{\sqrt{25 + 4}} = \sqrt{29} \rightarrow |9\alpha - 17| = 29 \rightarrow \begin{cases} 9\alpha - 17 = 29 \rightarrow \alpha_1 = \frac{46}{9} \\ 9\alpha - 17 = -29 \rightarrow \alpha_2 = \frac{-12}{9} \end{cases}$$

پس  $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{34}{9}$  است.

توجه کنید فاصله نقطه  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله  $0 = ax + by + c$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.