

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم $y = x$ است که شیب آن یک می‌باشد و چون خط باید با نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب هم، یک می‌باشد. چون این خط، نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم ($y = -x$) را در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ قطع می‌کند پس عرض آن $y = -۲$ است.

$$A \left| \begin{array}{c} ۲ \\ -۲ \end{array} \right., m = ۱ \rightarrow y - (-۲) = ۱(x - ۲) \rightarrow y + ۲ = x - ۲ \rightarrow y - x = -۴$$

۲ - گزینه ۴ گزینه‌ای درست است که نقطه‌ی $A \left| \begin{array}{c} ۱ \\ ۱ \end{array} \right.$ در آن صدق کند و در ضمن شیب خط برابر -۱ باشد زیرا:

$$y = x + ۱ \rightarrow m = ۱ \xrightarrow{\text{عمود}} m' = -۱$$

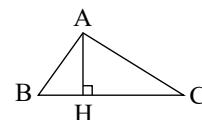
۳ - گزینه ۱ ارتفاع وارد بر ضلع BC ، عمود بر ضلع BC است پس شیب آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{۴ - ۳}{۵ - (-۱)} = \frac{۱}{۶} \rightarrow m_{AH} = -۶$$

معادله‌ی ارتفاع AH عبارت است از معادله‌ی خطی که شیب آن -۶ است و از نقطه‌ی $A(۲, ۰)$ می‌گذرد:

$$y - ۰ = -۶(x - ۲) \rightarrow y = -۶x + ۱۲$$

۴ - گزینه ۲



$$BC : ۲y + ۳x = ۶ \rightarrow m_{BC} = -\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{ارتفاع } AH \text{ بر ضلع } BC \text{ عمود است}} m_{AH} = \frac{۲}{۳}$$

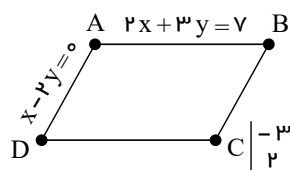
برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ی A کافی است معادلات خطوط اضلاع AB و AC را تلافی دهیم.

$$\begin{cases} ۲y - x = ۳ \\ y - ۲x = ۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x = -\frac{۷}{۳}, y = \frac{۱}{۳}$$

حال، معادله‌ی ارتفاع AH را با داشتن شیب و یک نقطه می‌نویسیم.

$$A \left| \begin{array}{c} -\frac{۷}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \end{array} \right., m_{AH} = \frac{۲}{۳} \rightarrow y - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}(x + \frac{۷}{۳}) \rightarrow ۳y - ۱ = ۲x + \frac{۱۴}{۳} \\ \xrightarrow{\times ۳} ۹y - ۳ = ۶x + ۱۴ \rightarrow ۹y - ۶x = ۱۷$$

۵ - گزینه ۳



یک شکل فرضی رسم می‌کنیم. توجه کنید که مختصات نقطه‌ی $(-۳, ۲)$ در هیچ کدام از خطوط داده شده صدق نمی‌کند پس این نقطه را رأسی در نظر می‌گیریم که روی هیچ‌کدام از این اضلاع نیست. در شکل بالا رأس C است.

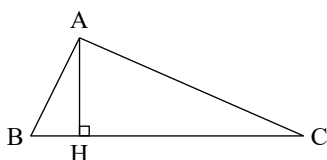
$$A \text{ مختصات نقطه‌ی } \begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ x - ۲y = ۰ \end{cases} \Rightarrow A(۲, ۱)$$

حالا معادله‌ی ضلع BC را می‌نویسیم. نقطه‌ی C روی این خط است و شیب آن برابر شیب خط $x - ۲y = ۰$ یعنی برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - ۲ = \frac{۱}{۲}(x + ۳) \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۲}$$

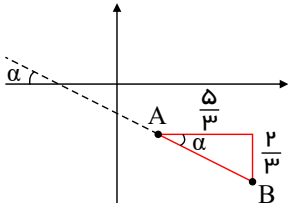
$$B \text{ مختصات نقطه‌ی } \begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۲} \end{cases} \Rightarrow B(-۱, ۳)$$

۶ - گزینه ۲ شکل فرضی روبرو را در نظر بگیرید، در ابتدا شیب ضلع BC را به دست می‌آوریم و چون ارتفاع، بر ضلع BC عمود است پس شیبش عکس و قرینه‌ی شیب ضلع BC است.

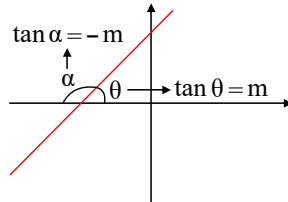


$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{۰ + ۲}{۳ - ۱} = ۱ \xrightarrow{AH \perp BC} m_{AH} = -۱$$

$$AH \text{ معادله‌ی ارتفاع } y - ۲ = -۱(x + ۱) \rightarrow y = -x + ۱$$

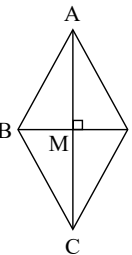


شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.



$$\text{پس: } \tan \alpha = -m = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

۸ - گزینه ۱ شکل فرضی B را در نظر بگیرید. در لوزی قطر‌ها برهم عمودند و یکدیگر را نصف می‌کنند پس نقطه B حتماً باید روی عمودمنصف پاره خط AC قرار داشته باشد.



$$\text{وسط } M \text{ از } AC \quad \begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{1 - 3}{-2 - 4} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \xrightarrow{BD \perp AC} m_{BD} = -3$$

$$BD \text{ معادله قطر: } y - 2 = -3(x - 1) \rightarrow y = -3x + 5$$

همه نقاط به جز نقطه $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ در معادله خط صدق می‌کنند.

۹ - گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(m, -1)$ و $B(1, 1 - 2m)$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y + 1}{x - m} = \frac{-1 - 1 + 2m}{m - 1} = \frac{2m - 2}{m - 1} = \frac{2(m - 1)}{m - 1} = 2$$

$$\rightarrow y + 1 = 2x - 2m \rightarrow y = 2x - 2m - 1$$

چون خط، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند، بنابراین:

$$(0, 3) \in \text{خط} \Rightarrow 3 = 0 - 2m - 1 \Rightarrow m = -2$$

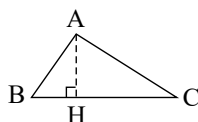
پس معادله‌ی خط به صورت $y = 2x + 4 - 1 = 2x + 3$ است.

حال برای یافتن نقطه‌ی تقاطع خط با محور xها، $y = 0$ را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم:

$$0 = 2x + 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

۱۰ - گزینه ۳

کافی است معادلات ارتفاع AH و ضلع BC را بنویسیم سپس با آنها تشکیل دستگاه دهیم:



$$BC: \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \rightarrow \frac{y + 1}{x - 3} = \frac{-1 - 2}{3 - 0} = -1 \rightarrow y + 1 = -x + 3 \rightarrow y = -x + 2$$

$$\begin{cases} A(2, 5) \\ m_{BC} = -1 \end{cases} \xrightarrow{AH \perp BC} m_{AH} = 1 \Rightarrow y - 5 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 3$$

معادله‌ی ارتفاع AH

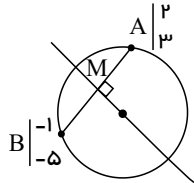
$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} y = \frac{5}{2}, x = -\frac{1}{2}$$

$$BC \text{ وسط } M \rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3 \end{cases} \rightarrow M \left| \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \right|_0$$

اکنون معادله میانه AM را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} A \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right|_2 \\ M \left| \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \right|_3 \end{cases} \rightarrow \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} \rightarrow \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2 - 3}{1 - 0} = -1 \rightarrow y - 2 = -x + 1 \xrightarrow{y=0} x = 3$$

مطابق شکل، قطری از دایره که بر پاره خط AB عمود است همان عمود منصف پاره خط AB می شود.

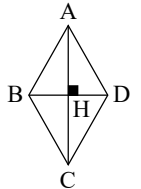


$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 + 5}{1 + 1} = \frac{7}{2} \rightarrow \text{شیب قطر دایره} = -\frac{2}{7}$$

$$AB \text{ وسط پاره خط } M \left| \begin{matrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{matrix} \right| \rightarrow M \left| \begin{matrix} \frac{1 - 1}{2} \\ \frac{2 - 5}{2} \end{matrix} \right| \rightarrow M \left| \begin{matrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix} \right|_{-1}$$

$$\text{معادله قطر: } y + 1 = -\frac{2}{7}(x - \frac{1}{2}) \xrightarrow{\times 14} 14y + 14 = -2x + 7 \rightarrow 14y + 2x = -7$$

$$AC \text{ وسط } H \left| \begin{matrix} \frac{1 + (-2)}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \end{matrix} \right|$$



قطر BD بر قطر AC عمود است پس کافی است شیب قطر AC را پیدا کرده و آن را عکس و قرینه کنیم تا شیب قطر BD بدست آید.

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-2 - 2}{1 + 3} = -1 \rightarrow m_{BD} = 1$$

حال، با داشتن نقطه و شیب، معادله ی قطر BD را می نویسیم.

$$H \left| \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix} \right|, m_{BD} = 1 \rightarrow y - 0 = 1(x + \frac{1}{2}) \xrightarrow{y=0} x = -\frac{1}{2}$$

$$AB: \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y}{x + 1} = \frac{0 - 2}{-1 - 0} = 2 \rightarrow y = 2x + 2$$

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{منسگاه}} x = -2, y = -2$$

$$2y + 3x = 6 \rightarrow m_{BC} = -\frac{2}{3} \rightarrow m_{AH} = \frac{3}{2}$$

اگر معادلات دو ضلع AB و AC را با هم تلاقی دهیم رأس A بدست می آید.

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{7}{3}, y = \frac{1}{3}$$

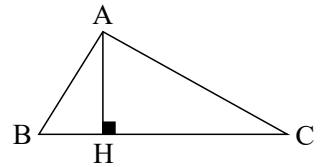
حال، با داشتن نقطه و شیب معادله ی ارتفاع AH را می نویسیم.

$$A \left| \begin{matrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \right|, m = \frac{3}{2} \rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{3}{2}(x + \frac{7}{3}) \xrightarrow{y=0} -\frac{1}{3} = \frac{3}{2}x + \frac{14}{2} \rightarrow \frac{3}{2}x = -\frac{15}{2} \rightarrow x = -\frac{15}{3}$$

۱۶ - گزینه ۱

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0 + 2}{3 - 1} = 1 \xrightarrow{AH \perp BC} m_{AH} = -1, A \left| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right|^{-1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 2 = -1(x + 1) \rightarrow y = -x + 1 \xrightarrow{x=0} y = 1$$



۱۷ - گزینه ۲

$$f(x) = [3x], x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[-\frac{9}{2}\right] = -5 \Rightarrow A\left(-\frac{3}{2}, -5\right)$$

حال باید معادله خط گذرنده از نقاط $B\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ و $A\left(-\frac{3}{2}, -5\right)$ را به دست آوریم.

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y + 5}{x + \frac{3}{2}} = \frac{-5 - 0}{-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}} = -5 \rightarrow y + 5 = -5x - \frac{15}{2} \rightarrow y = -5x - \frac{25}{2}$$

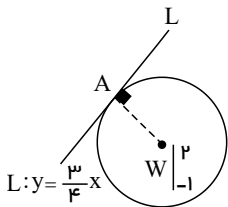
نقطه گزینه ۲ یعنی نقطه $\left(\frac{1}{2}, -15\right)$ در این خط صدق می‌کند.

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{25}{2} = -\frac{30}{2} = -15$$

۱۸ - گزینه ۳

شیب خط $y = \frac{3}{4}x$ برابر $\frac{3}{4}$ است.

خط L بر شعاع WA عمود است. پس شیب خط WA برابر $-\frac{4}{3}$ است و از نقطه $\left(\frac{2}{-1}\right)$ هم عبور می‌کند پس معادله این خط را می‌توان نوشت:



$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = \frac{-4}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + 3 = -4x + 8 \Rightarrow 3y + 4x = 5$$

نقطه A محل برخورد دو خط WA و L است:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3y + 4x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 16y = 0 \\ 9y + 12x = 15 \end{cases} \Rightarrow 25y = 15 \Rightarrow y = \frac{3}{5} = 0.6$$

۱۹ - گزینه ۲

$$AB \text{ وسط } M \left| \begin{matrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{matrix} \right| \rightarrow M \left| \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right|$$

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 7}{-2 - 2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} M \left| \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right| \\ m_{\text{عمودمنصف}} = -\frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{y - y_1 = m(x - x_1)} y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 2) \xrightarrow{y=0} -4 = -\frac{2}{3}x \rightarrow x = 6$$

۲۰ - گزینه ۱ ابتدا معادله ضلع BC را می‌نویسیم:

$$BC: \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \rightarrow \frac{y + 1}{x} = \frac{-1 + 4}{0 - 4} = -\frac{3}{4} \rightarrow 4y + 4 = -3x \rightarrow 4y = -3x - 4 \rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 1$$

برای نوشتن معادله ارتفاع AH ، کافی است شیب ضلع BC را پیدا کرده و آن را عکس و قرینه کنیم و با داشتن شیب و نقطه A ، معادله ارتفاع AH را بنویسیم.

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-1 + 4}{0 - 4} = -\frac{3}{4} \rightarrow m_{AH} = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A(2, 1) \\ m_{AH} = \frac{4}{3} \end{cases} \xrightarrow{y - y_1 = m(x - x_1)} y - 1 = \frac{4}{3}(x - 2) \rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

اکنون کافی است که محل تلاقی این دو را به دست آوریم:

$$AH \text{ ارتفاع و } BC \text{ ضلع محل برخورد} \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - 1 \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases} \rightarrow x = \frac{8}{25}, y = -\frac{31}{25}$$