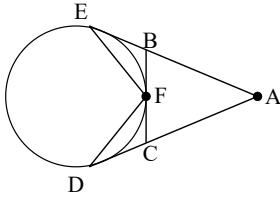


با توجه به این که طول دو مماس AD و AE با هم برابر است. پس خواهیم داشت:



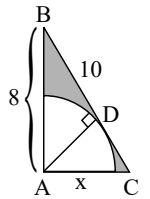
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{AE} \\ \overline{FC} = \overline{CD} \\ \overline{BF} = \overline{BE} \end{array} \right\} \rightarrow P_{\text{دایره}} ABC = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{FC} + \overline{AC}$$

$$= \underbrace{\overline{AB} + \overline{BE}}_{25} + \underbrace{\overline{CD} + \overline{AC}}_{25} = 25\text{cm} + 25\text{cm} = 50\text{cm}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ به دلیل اینکه شکل متقارن است مساحت یک قسمت را حساب کرده سپس آن را دو برابر می‌کنیم. طبق نکته: شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

$$x = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} \rightarrow x = 6 \rightarrow \text{ضلع سوم مثلث} = 2 \times 6 = 12$$

$$S_{\text{مثلث} ABC} = \frac{6 \times 8}{1} = 24$$



$$\overline{AD} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{8 \times 6}{10} = \frac{24}{5} = 4,8 \rightarrow \text{شعاع دایره}$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مثلث}} - S_{\text{دایره}} = 24 - \frac{\pi \times (4,8)^2}{4} = 24 - 17,28 = 6,72\text{cm}^2$$

$$S = 2 \times 6,72 = 13,44 \approx 13,5 \rightarrow \text{شکل متقارن است}$$

نکته: خط مماس در نقطه تماس با شعاع دایره در آن نقطه زاویه قائمه می‌سازد.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AH} \\ \overline{AC} = \overline{AH} \end{array} \right\} \text{طول دو مماس از یک نقطه بر دایره با هم برابر است:}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AH} = 8$$

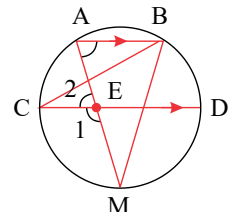
$$\triangle OAB \xrightarrow[\text{رابطه فیثاغورس}]{\text{قائم‌الزاویه است}} \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{AO}^2 \rightarrow 8^2 + y^2 = 9^2 \rightarrow y^2 = 81 - 64 = 17 \rightarrow y = \overline{BO} = \sqrt{17}$$

$$\triangle OAC \xrightarrow[\text{رابطه فیثاغورس}]{\text{قائم‌الزاویه است}} \overline{AC}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 \rightarrow 8^2 + x^2 = 10^2 \rightarrow x^2 = 100 - 64 = 36 \rightarrow x = \overline{CO} = \sqrt{36} = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸ با توجه به خاصیت خطوط موازی و مورب می‌توان نوشت:

$$\widehat{CD} \parallel \widehat{AB} \Rightarrow \hat{A} = \hat{E}_r = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BDM} = 80^\circ \times 2 = 160^\circ$$

$$\widehat{CBD} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{DMC} = 140^\circ$$

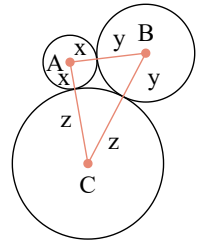


$$\widehat{CD} \parallel \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC} = \frac{360^\circ - (80^\circ + 140^\circ)}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

$$\widehat{MD} = 160^\circ - 70^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DBM} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

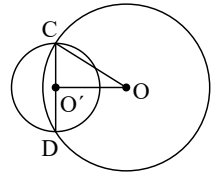
۱ ۲ ۳ ۴ ۹ اگر شعاع‌های دایره‌های کوچک، متوسط و بزرگ را به ترتیب x و y و z بنامیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC} = x + z = 14 \\ \overline{AB} = x + y = 10 \\ \overline{BC} = y + z = 18 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 2x + 2y + 2z = 42 \Rightarrow 2(x + y + z) = 42 \Rightarrow x + y + z = 21 \xrightarrow{y+z=18} x + 18 = 21 \Rightarrow x = 3$$



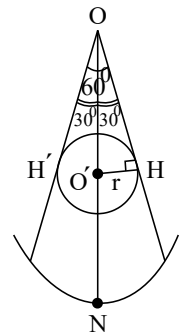
۱۰ قطر دایره کوچک با طول CD ، برابر و هر یک ۱۸ واحد هستند پس وتر CD ، قطر دایره کوچک است: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} \triangle OOC' : OC'^2 &= OO'^2 + O'C'^2 \\ 17^2 &= \overline{OO'}^2 + 9^2 \rightarrow \overline{OO'} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \end{aligned}$$

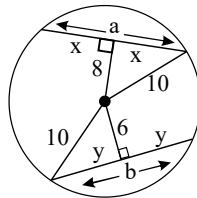


۱۱ در مثلث قائم الزاویه $OO'H$ پاره خط OO' ، نیمساز زاویه HOH' است. پس: $HOH' = 30^\circ$ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} \triangle OO'H : \overline{O'H} &= \frac{1}{2} \overline{OO'} \rightarrow \overline{OO'} = 2\overline{O'H} = 2r \\ \overline{OO'} &= \overline{ON} - \overline{O'N} = 7 - r \\ \Rightarrow 2r &= 7 - r \rightarrow 3r = 7 \rightarrow r = \frac{7}{3} \end{aligned}$$



۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ $y = \frac{b}{2}, x = \frac{a}{2}$



$$\begin{aligned} \rightarrow 8^2 + x^2 &= 10^2 \rightarrow x = 6 \rightarrow a = 2 \times 6 = 12 \\ \rightarrow 6^2 + y^2 &= 10^2 \rightarrow y = 8 \rightarrow b = 2 \times 8 = 16 \end{aligned}$$

۱۳ فرض شعاع دایره کوچک R آن گاه شعاع دایره بزرگ $2R$ می باشد. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CD}}{2} = 90^\circ$$

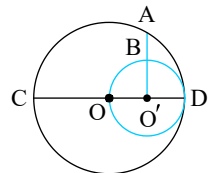
$$O'A^2 = O'C \cdot O'D$$

$$O'A^2 = 3R \cdot R = 3R^2 \Rightarrow O'A = \sqrt{3}R \Rightarrow$$

$$O'A = R + AB \rightarrow \sqrt{3}R = R + \sqrt{3} - 1 \Rightarrow \sqrt{3}R - R = \sqrt{3} - 1$$

$$R(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow R = 1$$

$$\text{شعاع دایره بزرگ} = 2R = 2(1) = 2$$

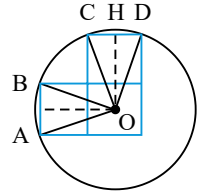


۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

مرکز دایره محل برخورد عمود منصف AB و CD است:

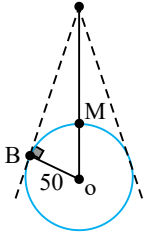
$$OH = 1 + 2 = 3, \quad HD = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Delta OHD: OD = R, \quad R^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow R = \sqrt{10}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

دورترین نقطه، نقطه‌ای است که در امتداد خط مماس بر دایره باشد. (نقطه B) شعاع قمر هم که برابر است با ۵۰ کیلومتر (۱۰۰ ÷ ۲ = ۵۰) فاصله A تا قمر هم برابر با AM است که AM = ۸۰ Km، پس:



$$AD = 80 + 50 = 130, \quad BO = 50$$

$$AB^2 = 130^2 - 50^2 = 16900 - 2500 = 14400 \Rightarrow AB = 120$$

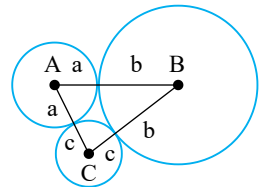
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

کوچک‌ترین ضلع AC و بزرگ‌ترین AB است، پس:

$$AB = 7 \Rightarrow a + b = 7$$

$$AC = 5 \Rightarrow a + c = 5$$

$$BC = 6 \Rightarrow b + c = 6$$



$$2a + 2b + 2c = 7 + 5 + 6 \Rightarrow 2(a + b + c) = 18 \Rightarrow a + b + c = 9 \Rightarrow c = 9 - 7 = 2$$

۲ خط مماس بر ربع دایره با هم برابرند پس چهارضلعی مربع است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$x^2 + x^2 = (\sqrt{2})^2 \rightarrow 2x^2 = 2$$

$$x = 1 \text{ ضلع مربع}$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{ربع دایره}} = (1)^2 - \frac{\pi \times (1)^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸ در مسائلی که $R + R' > d$ می‌شود، لازم است که $R - R'$ را نیز به دست آورد.

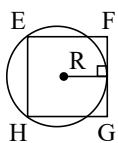
$$R + R' = \sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} > 5\sqrt{2} = d \quad d = 5\sqrt{2}$$

$$R - R' = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 < d = 5\sqrt{2}$$

$$R - R' < d < R + R'$$

دو دایره متقاطع‌اند و دو نقطه مشترک دارند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹



مشخص است که $R > \frac{1}{2}EF \Rightarrow R > \frac{4}{2} \Rightarrow R > 2$ (زیرا اگر $R \leq \frac{1}{2}EF$ باشد، دایره به طور کامل داخل مربع قرار می‌گیرد). هم‌چنین دایره در یک نقطه

بر ضلع مربع مماس و در دو نقطه دیگر، آن را قطع کرده است. که در این صورت باید $R < \overline{EF}$ باشد، زیرا اگر $R \geq \overline{EF}$ باشد، رأس‌های مربع روی دایره قرار

$$2 < R < 4$$

$$\downarrow$$

نمی‌گرفتند. پس $R < \overline{EF} = 4$ است. پس نتیجه می‌شود $4 < 2R < 8$

که گزینه دو در آن صدق می‌کند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

نکته: اختلاف دورترین و نزدیک‌ترین فاصله نقطه A نسبت به یک دایره برابر است با قطر دایره.

$$9 \text{ cm} = \text{قطر} \Rightarrow 3.14 \times \text{قطر} = 28.26 \Rightarrow 3.14 \times \text{قطر} = \text{محیط دایره}$$

x نزدیک ترین فاصله $16 - x = 9 \Rightarrow 16 - 9 = x \Rightarrow x = 7cm$

$$\text{شعاع} = \frac{\text{قطر}}{2} = \frac{9}{2} = 4,5cm$$