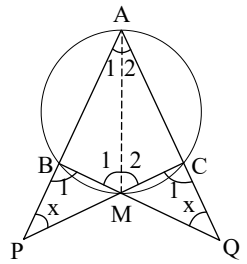
پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۴ **۳** ۲ ۱ نکته: در شکل زیر همواره داریم:

$$۲\hat{A}+\hat{P}+\hat{Q}=۱۸۰^\circ$$

اثبات:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_۱=\hat{A}+\hat{Q}\\ \hat{C}_۱=\hat{A}+\hat{P}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۲\hat{A}+\hat{P}+\hat{Q}\quad (۱)$$

از طرفی اگر A را به M وصل کنیم:

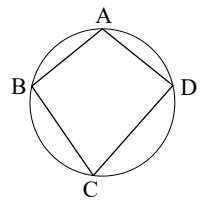
$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_۱=\hat{A}_۱+\hat{M}_۱\\ \hat{C}_۱=\hat{A}_۲+\hat{M}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{C}_۱=\hat{A}+\hat{M}=۱۸۰^\circ\quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق } (۱),(۲)} ۲\hat{A}+\hat{P}+\hat{Q}=۱۸۰^\circ$$

با توجه به نکتهٔ فوق داریم:

$$۲(۲x)+x+x=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۶x=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۳۰^\circ$$

۲ ۴ **۳** ۲ ۱ نکته: به چهارضلعی $ABCD$ محاطی می‌گوییم، هرگاه همهٔ رأس‌های آن روی محیط دایره واقع باشد، هم‌چنین به این دایره، دایرهٔ محیطی می‌گوییم. در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های مقابل به یکدیگر، مکمل‌اند:



$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\quad ,\quad \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

محاطی $\hat{A}=\dfrac{B\widehat{C}D}{۲}\Rightarrow ۱۰۲^\circ=\dfrac{B\widehat{C}D}{۲}\Rightarrow B\widehat{C}D=۲۰۴^\circ$

$\Rightarrow B\widehat{A}D=۳۶۰^\circ-۲۰۴^\circ=۱۵۶^\circ\Rightarrow$ محاطی $\hat{C}=\dfrac{B\widehat{A}D}{۲}=\dfrac{۱۵۶^\circ}{۲}=۷۸^\circ$

حل دوم: با استفاده از نکتهٔ فوق داریم:

$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۰۲^\circ=۷۸^\circ$$

۳ ۴ ۳ **۲** ۱

$$E\hat{C}D=\frac{\widehat{EF}+\widehat{FD}}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}AB\parallel DC\Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}\\ AF\parallel CE\Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{EF}\end{array}\right.\Rightarrow \widehat{BD}=\widehat{EF}=\widehat{AC}=x\Rightarrow ۶۰+۵۰+۴۰+۳x=۳۶۰$$

$$۱۵۰+۳x=۳۶۰\to ۳x=۲۱۰\to x=۷۰^\circ$$

$$E\hat{C}D=\frac{۷۰+۴۰}{۲}=\frac{۱۱۰}{۲}=۵۵^\circ$$

۴ ۴ **۳** ۲ ۱ اگر اندازهٔ هر کمان AF, FC, BD, CD, EB, AE را برابر x در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$۶x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$

g زاویهٔ داخلی دایره:

$$\hat{g} = \frac{\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{FC}}{۲} = \frac{۶۰ + ۶۰}{۲} = ۶۰^\circ$$

H زاویهٔ داخلی دایره:

$$\hat{H} = \frac{(\overset{\frown}{FC} + \overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{AE}) + \overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{(۳ \times ۶۰) + ۶۰}{۲} = ۱۲۰^\circ$$

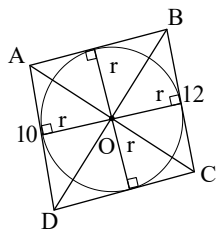
$$\hat{k} = \frac{(\overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{BE}) + \overset{\frown}{DC}}{۲} = \frac{(۳ \times ۶۰) + ۶۰}{۲} = ۱۲۰^\circ$$

K زاویهٔ داخلی دایره:

$$\Rightarrow H + k - g = ۱۲۰ + ۱۲۰ - ۶۰ = ۱۸۰^\circ$$

۵ ۱ ۲ ۳ **۴** نکته: اگر دایره‌ای به شعاع r و مرکز O دایرهٔ محاطی چهارضلعی $ABCD$ باشد، همواره داریم:

$$\star S_{ABCD} = \frac{r \times \text{محیط چهارضلعی}}{۲}$$



$$\left.\begin{aligned} S_{\overset{\triangle}{AOB}} &= \frac{۱}{۲} \times r \times \overline{AB} \\ S_{\overset{\triangle}{AOD}} &= \frac{۱}{۲} \times r \times \overline{AD} \\ S_{\overset{\triangle}{BOC}} &= \frac{۱}{۲} \times r \times \overline{BC} \\ S_{\overset{\triangle}{DOC}} &= \frac{۱}{۲} \times r \times \overline{DC} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} S_{ABDC} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times (\overline{AB} + \underbrace{\overline{AD} + \overline{BC}}_{۲۲} + \overline{DC})$$

$$\xrightarrow{\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{DC}} \frac{۱}{۲} \times ۵ \times (۴۴) = ۲۲ \times ۵ = ۱۱۰$$

۶ **۱** ۲ ۳ ۴ می‌دانیم که کمان مقابل با زاویهٔ مرکزی با هم برابرند بنابراین:

$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB} = ۶۰$

و چون D زاویهٔ محاطی است داریم:

$A\hat{D}B = \frac{۶۰}{۲} = ۳۰^\circ$

از آنجایی که $F\hat{D}A$ زاویهٔ خارجی است پس داریم:

$A\hat{D}F = ۱۸۰ - ۳۰ = ۱۵۰^\circ$

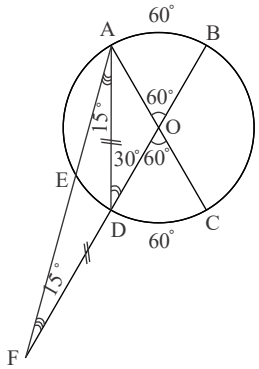
و چون $DF = AD$ پس مثلث $\overset{\triangle}{ADF}$ مثلث متساوی‌الساقین است بنابراین:

$D\hat{A}F = D\hat{F}A = \frac{۱۸۰ - ۱۵۰}{۲} = ۱۵^\circ$

و چون $D\hat{A}F$ زاویهٔ محاطی است.

$\overset{\frown}{ED} = ۱۵ \times ۲ = ۳۰^\circ$

$\overset{\frown}{CDE} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{ED} = ۶۰ + ۳۰ = ۹۰$



۷ ۱ ۲ **۳** ۴

ظلی $C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$

$\hat{B}_1 = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow C\hat{A}D = \hat{B}_1 \qquad (۱)$

$\left.\begin{array}{l} A\overset{\Delta}{C}D : \overline{CD} = \overline{AC} \Rightarrow \hat{D} = C\hat{A}D \ (۱) \\ \text{زاویهٔ خارجی } C_1 = \hat{D} + C\hat{A}D \ (۲) \end{array}\right\} \rightarrow C_1 = ۲C\hat{A}D \ (۳)$

$A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث قائم‌الزاویه است! $\Rightarrow B_1 + C_1 + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{(۲),(۱)} C\hat{A}D + C\hat{A}D + C\hat{A}D = ۹۰^\circ$

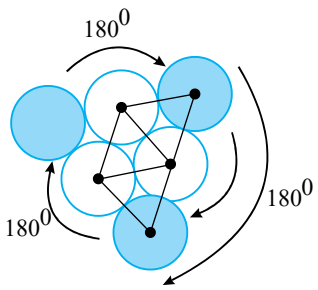
$\Rightarrow ۳C\hat{A}D = ۹۰^\circ \qquad \Rightarrow C\hat{A}D = ۳۰^\circ$

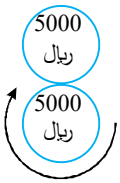
طبق ۱ $\Rightarrow C\hat{A}D = D = ۳۰^\circ$

۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

ابتدا به این نکته توجه کنید که اگر دو سکهٔ هم‌اندازه داشته باشیم و یکی دور دیگری غلت بزند، و به سر جای خود برگردد، دو دور چرخیده است. (می‌توانید با دو سکه امتحان کنید.)

حالا در شکل مقابل سکهٔ رنگی ۱۸۰° دور هر دایره می‌چرخد یعنی یک دور، دور خودش می‌زند! و سه سکه را با سه دور چرخش دور می‌زند، یعنی $۳ \times ۳۶۰^\circ = ۱۰۸۰^\circ$ چرخیده است!



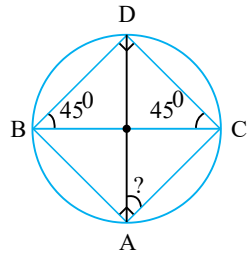


۹ ۱ ۲ **۳** ۴

D را به A وصل کنید تا زاویهٔ DAC را ببینید!

چون $\hat{A} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$ پس این چهارضلعی محاطی است، یعنی می‌توان دایره‌ای رسم کرد که از نقاط A ، B ، C و D بگذرد (خوب این دایره را رسم می‌کنیم) چون BC وتر هر دو مثلث است، پس قطر دایره است! در ضمن مثلث DBC متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است، یعنی زاویه‌های تند آن ۴۵° هستند:

$D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} = D\hat{B}C = ۴۵^\circ$



۱۰ **۱** ۲ ۳ ۴

$x + ۴x + \frac{۱}{۴}x + \frac{۱}{۴}x + \frac{۷}{۲}x = ۳۶۰^\circ$

$۵x + ۴x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$

$A\hat{E}D$ یک زاویهٔ محاطی است!

$A\hat{E}D = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{۴۰ + ۴(۴۰) + \frac{۱}{۴}(۴۰)}{۲} = \frac{۲۱۰}{۲} = ۱۰۵^\circ$

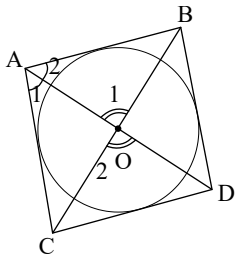
$A\hat{E}F = ۱۸۰ - ۱۰۵ = ۷۵^\circ$

$$B\hat{A}E = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{ED}}{۲} = \frac{۴(۴۰) + \frac{۱}{۴}(۴۰) + \frac{۱}{۴}(۴۰)}{۲} = \frac{۱۶۰ + ۱۰ + ۱۰}{۲} = ۹۰$$

$$F\hat{A}E = ۹۰ - ۱۰ = ۸۰$$

$$A\hat{F}E = ۱۸۰ - (۸۰ + ۷۵) = ۲۵$$

۱۱ ۱ ۲ **۳** ۴ نکته: در هر چهارضلعی محیطی داریم:



$$A\hat{O}B + D\hat{O}C = ۱۸۰^\circ$$

$$A\hat{O}C + B\hat{O}D = ۱۸۰$$

اثبات: چون از O، مرکز دایره به رأس A وصل شده است پس $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = \frac{\hat{A}}{۲}$ ، هم‌چنین برای رئوس B و C و D نیز این رابطه برقرار است . داریم:

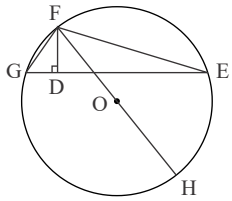
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AOB} : \hat{O}_۱ = ۱۸۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} - \frac{\hat{B}}{۲} \\ \overset{\Delta}{DOC} : \hat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲} - \frac{\hat{D}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۳۶۰^\circ - (\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} + \frac{\hat{D}}{۲})$$

$$\Rightarrow \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۳۶۰ - \frac{۱}{۲} \times ۳۶۰ = ۳۶۰ - ۱۸۰ = ۱۸۰^\circ$$

۱۲ ۴ ۳ ۲ **۱** از H به E وصل می‌کنیم. چون FH قطر می‌باشد. پس $\overset{\Delta}{FEH}$ قائمه است یعنی $\hat{H} + \hat{F}_۲ = ۹۰^\circ$

از طرفی $\hat{H} = \hat{G} = \frac{\overset{\frown}{FE}}{۲}$ است. پس می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{F}_۱ + G = ۹۰^\circ \\ \hat{F}_۲ + H = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{G=H} \hat{F}_۱ = \hat{F}_۲$$



۱۳ **۴** ۳ ۲ ۱ چون $A\hat{B}F$ یک زاویهٔ محاطی است پس داریم:

$$\overset{\frown}{AF} = ۴۰^\circ$$

نکته: قطر عمود بر وتر، کمان نظیر آن را نصف می‌کند بنابراین:

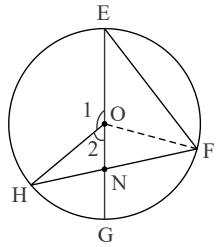
$$\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{AE} = ۴۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{FD} \text{ طبق فرض } \Rightarrow ۲\overset{\frown}{EC} + \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{AF} = ۱۸۰ \Rightarrow ۲EC + ۸۰ = ۱۸۰ \rightarrow \overset{\frown}{EC} = ۵۰ = \overset{\frown}{FD}$$

$$\hat{x} = \frac{\overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{EC}}{۲} = \frac{۴۰ + ۴۰ + ۵۰}{۲} = \frac{۱۳۰}{۲} = ۶۵^\circ$$

۱۴ ۱ ۲ **۳** ۴ $\overset{\frown}{EH}$ زاویهٔ مرکزی می‌باشد پس $O_۱$ برابر ۱۳۰° درجه می‌باشد:

$$\hat{O} = \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ \Rightarrow ۱۸۰^\circ = ۱۳۰^\circ + O_۲ \rightarrow \hat{O}_۲ = ۵۰^\circ$$



$\overset{\frown}{FG}$ کمان روبه‌روی زاویه محاطی است.

$\hat{E} = \frac{\widehat{FG}}{۲} = \frac{۷۵^\circ}{۲} = ۳۷/۵^\circ$

از O به F وصل می‌کنیم : $\overset{\triangle}{OEF}$ متساوی‌الساقین : $E\hat{O}F : ۱۸۰ - (۲ \times ۳۷/۵^\circ) = ۱۰۵^\circ \Rightarrow F\hat{O}N = ۷۵^\circ$

$F\hat{O}H = ۵۰^\circ + ۷۵^\circ = ۱۲۵^\circ$

$\overset{\triangle}{FOH}$ متساوی‌الساقین : $\frac{(۱۸۰^\circ - ۱۲۵^\circ)}{۲} = \frac{۵۵^\circ}{۲} = ۲۷/۵^\circ = O\hat{H}F$

$\overset{\triangle}{ONH}$: خارجی $G\hat{N}H = N\hat{O}H + O\hat{H}F = ۵۰^\circ + ۲۷/۵^\circ = ۷۷/۵^\circ$

راه حل ۲:

$\Rightarrow G\hat{N}H = \frac{\widehat{HG} + \widehat{EF}}{۲} = \frac{۳۶۰ - \widehat{EH} - \widehat{FG}}{۲} = \frac{۳۶۰ - ۱۳۰ - ۷۵}{۲} = \frac{۱۵۵}{۲} = ۷۷/۵$

۱۵ ۴ **۳** ۲ ۱ $\hat{D}$ زاویهٔ محاطی است:

$\hat{D} = ۳۲^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = ۳۲ \times ۲ = ۶۴^\circ$

$\hat{g}$ زاویهٔ داخلی دایره است:

$\hat{g} = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{۲} \Rightarrow ۸۴ = \frac{\widehat{DE} + ۶۴}{۲} \Rightarrow \widehat{DE} = ۱۰۴^\circ$

$\hat{A}$ زاویهٔ خارجی دایره است:

$\hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{۲} = \frac{۱۰۴ - ۶۴}{۲} = ۲۰^\circ$

۱۶ **۴** ۳ ۲ ۱ g زاویهٔ داخلی دایره:

$g = \frac{\widehat{AB} + \widehat{DE}}{۲} = \frac{۳\widehat{DE} + \widehat{DE}}{۲} = ۲\widehat{DE}$

$۶۴ = ۲\widehat{DE} \Rightarrow \widehat{DE} = ۳۲^\circ \xrightarrow{\widehat{AB} = ۳\widehat{DE}} \widehat{AB} = ۳۲ \times ۳ = ۹۶^\circ$

C زاویهٔ خارجی:

$C = \frac{\widehat{AB} - \widehat{DE}}{۲} = \frac{۹۶ - ۳۲}{۲} = ۳۲^\circ$

A زاویهٔ محاطی:

$\hat{A} = \frac{\widehat{EF}}{۲} = \frac{۵۴}{۲} = ۲۷^\circ$

$\hat{A} + C = ۲۷ + ۳۲ = ۵۹^\circ$

۱۷ ۴ **۳** ۲ ۱

زاویهٔ مرکزی $O \Rightarrow \widehat{AC} = ۱۰۰^\circ$

$E_۱ = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DB}}{۲} = \frac{۱۰۰ + ۹۴}{۲} = ۹۷^\circ$

$E_۲ = ۱۸۰ - ۹۷ = ۸۳^\circ$

۱۸ **۴** ۳ ۲ ۱

در شکل مقابل، به شرط مماس بودن PA بر دایره داریم:

$P = \frac{\widehat{AQ} - \widehat{AC}}{۲} \Rightarrow ۲P = \widehat{AQ} - \widehat{AC} \rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AQ} - \widehat{AC}$

$\widehat{QA} = \widehat{CA} + \widehat{CB}$

$۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ + \widehat{CB} \rightarrow \widehat{CB} = ۶۰^\circ$

$\widehat{PB} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$

$\hat{C} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$

راه ۲:

$\widehat{CA} = ۶۰^\circ \to \widehat{AQ} = ۱۲۰^\circ \to P = \frac{\widehat{QA} - \widehat{AC}}{۲} = \frac{۱۲۰ - ۶۰}{۲} = ۳۰$

$B = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰$

$\to \overset{\Delta}{CPB} \Rightarrow ۹۰ + ۳۰ + C = ۱۸۰ \to C = ۶۰^\circ$

۱۹ ۴ ۳ **۲** ۱

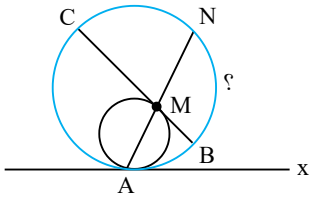
$FG \parallel EH \to \widehat{GE} = \widehat{GH}$

زاویهٔ ظلی $E = \frac{\widehat{EH}}{۲} \to ۱۲۰ = \widehat{EH}$

$x = \widehat{GH} \to ۳۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ + ۲x \to ۳۶۰ - ۱۲۰ = ۲x$

$۲۴۰ = ۲x \to x = ۱۲۰^\circ = \widehat{GH}$

۲۰ ۴ ۳ ۲ **۱** در نقطهٔ A مماس x را رسم می‌کنیم:



زاویهٔ داخلی $N\hat{A}x = \hat{A} = \frac{\widehat{MA}}{۲} = ۶۰^\circ$

ولی در دایرهٔ بزرگ: $\hat{A} = \frac{\widehat{NA}}{۲}$ پس:

$۶۰^\circ = \frac{\widehat{NA}}{۲} \Rightarrow \widehat{NA} = ۱۲۰^\circ$

$\widehat{AB} = ۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲۰^\circ - ۸۰^\circ = ۴۰^\circ \Rightarrow \widehat{NB} = ۴۰^\circ$

۲۱ ۴ ۳ ۲ **۱**

ابتدا زاویهٔ C را حساب می‌کنیم. با توجه به اینکه E و F زاویه خارجی و C زاویه محاطی است داریم:

$F = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{۲}$

$E = \frac{\widehat{CB} - \widehat{AD}}{۲} \to F + E + ۲C = ۱۸۰^\circ$

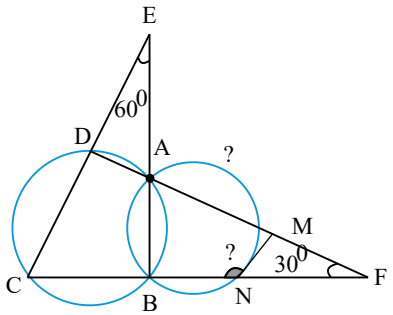
$C = \frac{\widehat{DA} - \widehat{AB}}{۲}$

چون $CDAB$ محاطی است، $\hat{C} + D\hat{A}B = ۱۸۰^\circ$ پس:

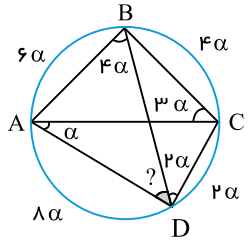
$B\hat{A}M = \hat{C} = ۴۵^\circ$

و چون $AMNB$ هم محاطی است، پس:

$N = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$



۲۲ ۱ **۲** ۳ ۴ دایرهٔ محیطی را رسم می‌کنیم و اندازهٔ کمان‌ها را برحسب α می‌نویسیم:

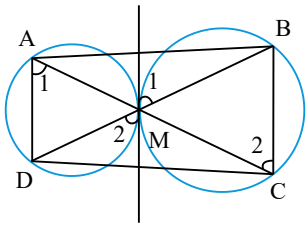


$$۴\alpha + ۶\alpha + ۸\alpha + ۲\alpha = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۸^\circ$$

$$? = \frac{۶\alpha}{۲} = ۳\alpha = ۳ \times ۱۸^\circ = ۵۴^\circ$$

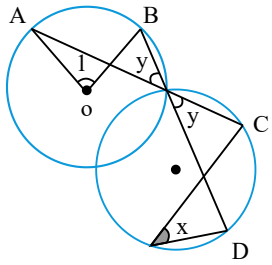
۲۳ ۱ **۲** ۳ ۴

در نقطهٔ A مماس رسم می کنیم.



$$\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \Rightarrow \widehat{MA} = \widehat{DM} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۲ \Rightarrow AD||BC$$

پس چهارضلعی ذوزنقه است. (دو ضلع دیگر واضح است موازی نیستند.)

۲۴ ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم O زاویهٔ مرکزی است و $\hat{O}_۱ = ۶۰^\circ = \widehat{AB}$، و y زاویهٔ محاطی است و $\hat{y} = \frac{\widehat{AB}}{۲}$ پس $\hat{y} = ۳۰^\circ$. زاویهٔ مقابل به رأس هم y است، یعنی ۳۰° و x و y در دایرهٔ زیری هر دو محاطی و مقابل به کمان $\widehat{CD}$ هستند. پس با هم مساویند، یعنی $x = ۳۰^\circ$