

پاسخنامه تشریحی

مشخص است که $\overline{KM} = \frac{2}{4}\overline{AC}$ است داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱

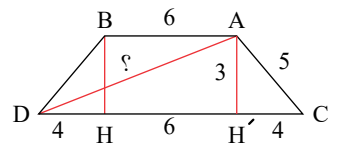
$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$$

$$KM = \frac{2}{4}AC = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

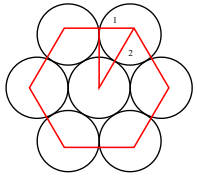
با توجه به شکل و این که چهارضلعی $ABHH'$ مستطیل است، داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$\overline{CH'} = \frac{14 - 16}{2} = -1 \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} \overline{AH'} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \Delta ADH' : \overline{AD}^2 = \overline{AH'}^2 + \overline{DH'}^2 = 9 + 100 = 109$$

$$\Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{109}$$



از متصل کردن مراکز دایره‌های بیرونی یک ضلعی منتظم به دست می‌آید که فاصله مرکز شش ضلعی از هر کدام از رئوس آن برابر با ۲ سانتی‌متر است. کافی است فاصله مرکز تا یکی از اضلاع ۶ ضلعی را محاسبه کنیم. در واقع کافی است ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۲ سانتی‌متر را با استفاده از قضیه فیثاغورس محاسبه کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳



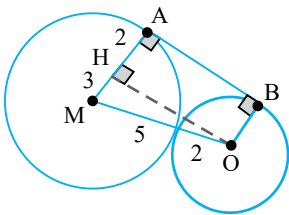
$$(1^2 - 1^2) = x^2$$

$$x = \sqrt{3}$$

کمترین فاصله زمانی اتفاق می‌افتد که حسین دقیقاً بر روی رأس متساوی‌الساقین قرار گرفته باشد که سعید و تیرک دروازه دو رأس دیگر آن باشند. عرض زمین ۴۰ متر است بنابراین نیمی از آن ۲۰ متر خواهد بود. بنابراین فاصله تیرک دوم دروازه از سعید برابر با ۲۴ متر است. بنابراین قاعده مثلث متساوی‌الساقین ۲۴ متر است. حال کافی است طول ساق را با استفاده از فیثاغورس محاسبه کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$12^2 + 5^2 = x^2$$

$$x = 13$$

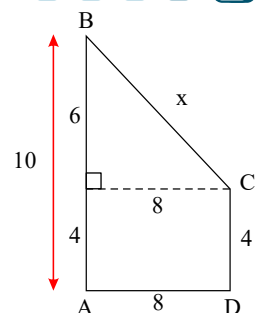


از مرکز دو دایره به A و B وصل می‌کنیم که در هر دو زاویه قائمه ایجاد می‌شود! مماس بر دایره بر شعاع در نقطه تماس عمود است! ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$5 - 2 = 3 = HM, MO = 5 + 2 = 7 \Rightarrow \Delta HMO : HO^2 = 7^2 - 3^2 = 40 \Rightarrow HO = \sqrt{40} \Rightarrow AB = HO = \sqrt{40}$$

بنابر قضیه فیثاغورس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$x^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

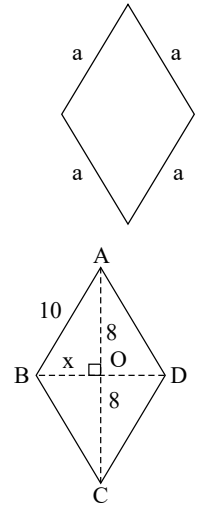


شکل زیر را در نظر بگیرید: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$\text{محیط} = 4 \times a = 40 \Rightarrow a = 10$$

$$\text{بنا بر قضیه فیثاغورس: } AB^2 = OB^2 + AO^2 \Rightarrow 10^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow \text{مساحت لوزی} = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{16 \times 12}{2} = 96$$

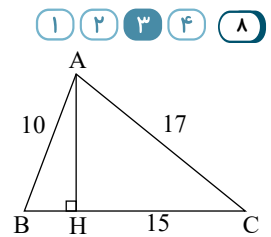


$$AH^2 = 17^2 - 15^2 \Rightarrow 289 - 225 = 64 \Rightarrow AH = 8$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$10^2 = 8^2 + BH^2 \Rightarrow BH = 6$$

$$\text{مساحت} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{8 \times (6 + 15)}{2} = \frac{8 \times 21}{2} = 84$$



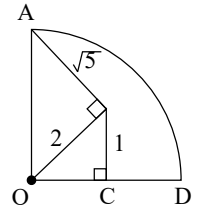
شکل زیر را در نظر بگیرید: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$OA^2 = (\sqrt{5})^2 + 2^2 = 5 + 4 = 9 \rightarrow OA = 3$$

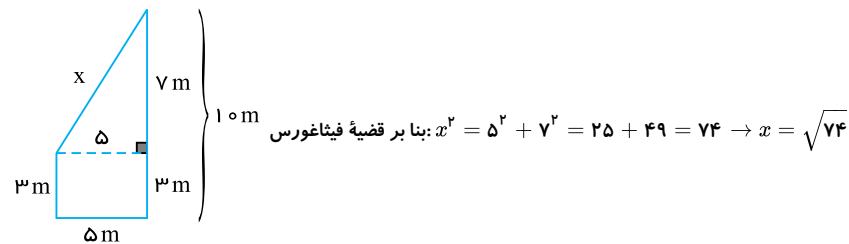
$$OC^2 + 1^2 = 2^2 \text{ (شعاع دایره)}$$

$$OC^2 + 1 = 4 \Rightarrow OC^2 = 3 \Rightarrow OC = \sqrt{3}$$

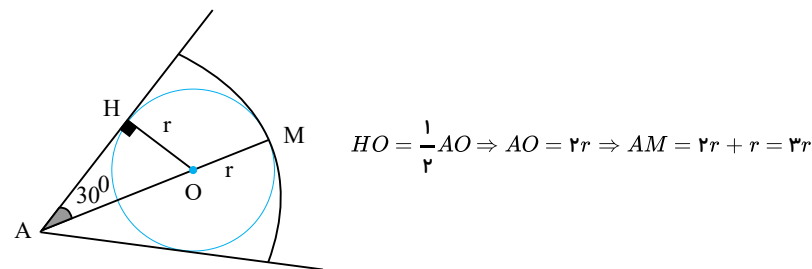
$$CD = OD - OC = 3 - \sqrt{3}$$



نمودار مسأله به شکل زیر است: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰



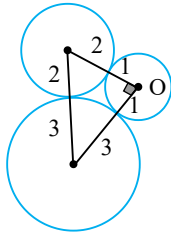
می‌دانیم AO نیم‌ساز A است، پس در مثلث AOH: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱



یعنی شعاع دایره کوچک، $\frac{1}{3}$ شعاع دایره بزرگ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

باید مرکز سه دایره را به هم وصل کنیم و مثلثی بسازیم و اضلاعش را حساب کنیم



همان طور که در شکل پیداست، اضلاع مثلث ۳ و ۴ و ۵ هستند و مثلث قائم الزاویه است پس زاویه O قائمه است و طول قوس 270° است یعنی $\frac{3}{4}$ محیط دایره.

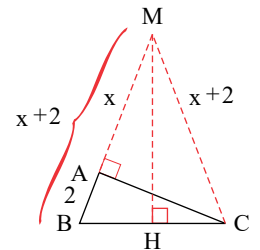
$$\text{طول قوس رنگی} = \frac{3}{4} \times (2\pi \times r) = \frac{3}{4} \times 2\pi \times 1 = \frac{3\pi}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳ با توجه به این که هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است داریم:

$$\overline{MB} = \overline{MC} = x + 2$$

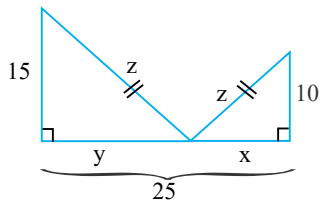
$$\Delta AMC : \overline{MC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AC}^2 \Rightarrow (x+2)^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 36 \Rightarrow 4x = 36 - 4 = 32$$

$$\Rightarrow x = \frac{32}{4} = 8$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

شکل هندسی این ماجرا به صورت روبه روست:



$$x + y = 25 \quad (1)$$

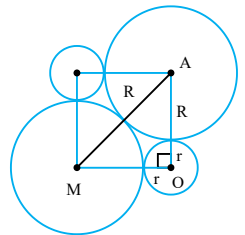
$$z^2 = 15^2 + y^2 = 10^2 + x^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 225 - 100 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 125 \Rightarrow x-y = 5 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow x + y + x - y = 25 + 5 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵ قطر مربع را رسم می کنیم، شعاع دایره بزرگ را با R و کوچک را با r نشان می دهیم و در مثلث قائم الزاویه AMO چون قطر مربع $\sqrt{2}$ برابر ضلع است داریم:

$$2R = \sqrt{2}(R+r) \Rightarrow 2R - \sqrt{2}R = \sqrt{2}r \Rightarrow (2 - \sqrt{2})R = \sqrt{2}r$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

رابطه فیثاغورس و حل معادله: اتحاد مربع را هم که بلدید!

$$(2x-3)^2 + (2x+3)^2 = \sqrt{146}^2 \Rightarrow 4x^2 + 9 - 12x + 4x^2 + 9 + 12x = 146 \Rightarrow 8x^2 = 128 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

نکاتی که نیاز داریم:

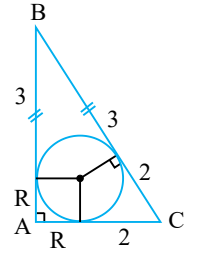
۱- از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم با هم برابرند.

۲- مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع عمود است؛ شکل را ببینید:

فیثاغورس

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow (R+3)^2 + (R+2)^2 = 5^2$$



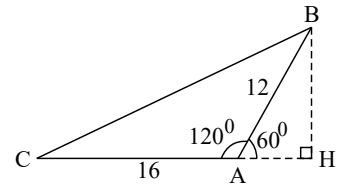
حدس و خطا: اعداد فیثاغورسی ۳ و ۴ و ۵ هستند اگر $R = 1$ باشد، درست است:

$$R = 1 \Rightarrow 4^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow S = \pi R^2 = \pi \times 1^2 = \pi$$

۱۸ (۱ ۲ ۳ ۴) ضلع AC را امتداد داده و از B بر آن عمود رسم می‌کنیم.

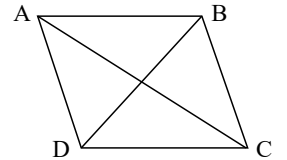
$$\triangle ABH \rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times BA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} : \frac{BH \times AC}{2} = \frac{6\sqrt{3} \times 16}{2} = 48\sqrt{3}$$



۱۹ (۱ ۲ ۳ ۴) نکته: در هر متوازی‌الاضلاع، همواره مجموع مربع دو قطر با دو برابر مجموع مربعات دو ضلع آن برابر است:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2 \times (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$$



طبق نکته فوق داریم:

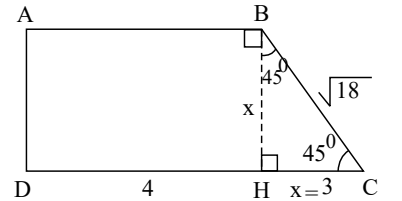
$$2 \times (12^2 + 6^2) = 2 \times (144 + 36) = 2 \times 180 = 360$$

۲۰ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$\triangle BHC : x^2 + x^2 = (\sqrt{18})^2 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x = 3$$

$$\overline{DH} = 7 - 3 = 4 = \overline{AB}$$

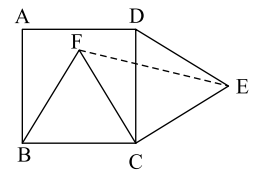
$$\rightarrow S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \times BH}{2} = \frac{(4 + 7) \times 3}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$



۲۱ (۱ ۲ ۳ ۴)

با توجه به شکل داریم:

$$\left. \begin{aligned} \angle ECF &= \angle ECD + \angle DCF \\ \angle DCF &= 90^\circ - \angle FCB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \angle ECF = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$



پس مثلث $\triangle ECF$ در رأس C قائم‌الزاویه است. پس داریم:

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{EC}^2 + \overline{CF}^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$$

۲۲ (۱ ۲ ۳ ۴) از فرض مسئله نتیجه می‌شود که: $\overline{AN} = \frac{4}{3} \overline{NC}$. در مثلث $\triangle DNC$ داریم:

$$\overline{DC}^2 = 64 - \overline{NC}^2, \overline{DC} = \overline{AB} \rightarrow \overline{AB}^2 = 64 - \overline{NC}^2$$

در مثلث $\triangle ANB$ داریم:

$$\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 \rightarrow \overline{AN}^2 = (64 - \overline{NC}^2) + 36 \rightarrow \frac{16}{9} \overline{NC}^2 = 100 - \overline{NC}^2$$

$$\rightarrow \frac{25}{9} \overline{NC}^2 = 100 \rightarrow \overline{NC}^2 = \frac{100 \times 9}{25} \rightarrow \overline{NC} = \frac{10 \times 3}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

۲۳ (۱ ۲ ۳ ۴) نکته: اگر قطر یا شعاعی از دایره بر وتر دایره عمود باشد، عمودمنصف نیز هست.

طبق نکته ذکر شده $\overline{AH} = \overline{BH}$ است. از طرفی $\overline{DC} = \overline{DH} + \overline{CH}$ می‌باشد. که داریم:

$$\overline{DC} = 10 + 6 = 16 \rightarrow \overline{CO} = 16 \div 2 = 8 \rightarrow \overline{OH} = \overline{OD} - \overline{HD} = 8 - 6 = 2 \text{ cm}$$

$$R^2 = \overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2 \rightarrow 64 = \overline{AH}^2 + 4 \rightarrow \overline{AH} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$\rightarrow \overline{AB} = 2 \times \overline{AH} = 2 \times 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$$