پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ a و b دو عدد متوالی‌اند، بنابراین:

$$(a,b)=۱$$

$$\frac{[a,[a,b]]}{(b,(a,b))}=\frac{[a,ab]}{(b,۱)}=\frac{ab}{۱}=ab$$

۲ - گزینه ۲

$$\frac{(x,x\times x\times y)\div[x\times yx\times y\times x,x\times y\times y,x\times y]}{(x\times x\times x\times y\times y\times y,y\times y\times x\times x)}$$

$$=\frac{x\div x\times x\times x\times y\times y}{x\times x\times y\times y}=\frac{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\,xxyy}}{xxyy}=\frac{\frac{۱}{xxyy}}{xxyy}=\frac{۱}{xxxxyyyy}=\frac{۱}{x^۴y^۴}$$

۳ - گزینه ۳ ابتدا عدد ۱۵۰ را تجزیه می‌کنیم:

$$۱۵۰=۲\times۳\times۵^۲$$

چون $(a,b)=۱$ و $a>b$ است پس:

$$\begin{matrix}a=۵^۲\\b=۲\times۳\end{matrix}\quad,\quad\begin{matrix}a=۲\times۵^۲\\b=۳\end{matrix}\quad,\quad\begin{matrix}a=۳\times۵^۲\\b=۲\end{matrix}\quad,\quad\begin{matrix}a=۲\times۳\times۵^۲\\b=۱\end{matrix}$$

۴ - گزینه ۳

$$۲^{۱۳۹۸}+۲^{۱۳۹۷}+۲^{۱۳۹۶}\xrightarrow{\text{عکس عمل توزیع‌پذیری}}۲^{۱۳۹۶}(۲^۲+۲+۱)=۲^{۱۳۹۶}\times۷$$

$\rightarrow(۱۳۹۶+۱)(۱+۱)=۱۳۹۷\times۲=۲۷۹۴$ تعداد شمارنده‌ها مثبت:

۵ - گزینه ۱ مقدار z,y,x را بدست می‌آوریم:

$$x:۱۱\times۱۱^{۱۳}\times۱۳^{۱۱}=۱۱^{۱۴}\times۱۳^{۱۱}\rightarrow(۱۴+۱)(۱۱+۱)=۱۵\times۱۲=۱۸۰$$

$$y:۱۳\times۱۱^{۱۳}\times۱۳^{۱۱}=۱۱^{۱۳}\times۱۳^{۱۲}\rightarrow(۱۳+۱)(۱۲+۱)=۱۴\times۱۳=۱۸۲$$

$$z:۵\times۱۱^{۱۳}\times۱۳^{۱۱}\rightarrow(۱+۱)(۱۳+۱)(۱۱+۱)=۲\times۱۴\times۱۲=۳۳۶$$

$$\Rightarrow x<y<z$$

۶ - گزینه ۲ طبق فرض سوال داریم:

$$(A,B)=۲۲=۲\times۱۱$$

$$[A,B]=۳۳۰=۲\times۳\times۵\times۱۱$$

پس طبق فرض هردو عدد عامل‌های ۲ و ۱۱ دارند و توان هر دو یک است از آنجایی که بر هم بخش‌پذیر نیستند پس یکی عامل ۳ دارد و دیگری عامل ۵ دارد.

$$۲\times۳\times۱۱+۲\times۵\times۱۱=۶۶+۱۱۰=۱۷۶$$

۷ - گزینه ۲

$$۱۲a=۲^۲\times۳\times a\quad\text{و}\quad۱۸a=۲\times۳^۲\times a$$

شمارنده‌های مشترک با کم‌ترین توان $\text{ب‌م‌م}=۲\times۳\times a=۴۲\Rightarrow a=۷$

شمارنده‌های مشترک با بیشترین توان و غیرمشترک‌ها $\text{ک‌م‌م}=۲^۲\times۳^۲\times a=۲^۲\times۳^۲\times۷=۲۵۲$

۸ - گزینه ۲ عدد ۱۱۰۱۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

$$۱۱۰۱۱=۱۱\times۱۰۰۱$$

و عدد $۷۵^{۲۴}+۷۶^{۲۳}+۱^{۲۳}$ دارای یکان $(\underline{۲}=۱+۶+۵)$ می‌باشد، پس زوج است و بر ۲ بخش‌پذیر است.

$$\underbrace{\text{فرد}+\text{زوج}}_{\text{فرد}}+\text{فرد}=\text{زوج}$$

۹ - گزینه ۱ باید به طور مساوی ضریب‌ها را بین A و B قسمت کنیم، تا حداکثرمقسوم‌علیه مشترک را دو عدد داشته باشند:

$$\begin{array}{r|l} ۶۴۸ & ۲ \\ ۳۲۴ & ۲ \\ ۱۶۲ & ۲ \\ ۸۱ & ۳ \\ ۲۷ & ۳ \\ ۹ & ۳ \\ ۳ & ۳ \\ ۱ & \end{array}$$

$$۶۴۸ = ۲^۳ \times ۳^۴$$

$$\left.\begin{array}{l} A = ۲^۲ \times ۳^۲ \\ B = ۲ \times ۳^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow (A, B) = ۲ \times ۳^۲ = ۱۸$$

۱۰ - گزینه ۱ طبق صورت سوال داریم:

$$\underbrace{a}_{\text{فرد}}{}^۳ - b^۳ = \underbrace{۲۱۸۹}_{\text{فرد}} \to a^۳ - ۲۱۸۹ = \underbrace{b}_{\text{زوج}}{}^۳$$

پس نتیجه می‌گیریم $b^۳$ زوج است و تنها عدد زوج اول ۲ است.

$$a^۳ = (۲)^۳ + ۲۱۸۹ = ۸ + ۲۱۸۹ = ۲۱۹۷ \to a = ۱۳$$

$$a^۲ - b^۲ = ۱۳^۲ - ۲^۲ = ۱۶۹ - ۴ = ۱۶۵$$

۱۱ - گزینه ۱ ابتدا عدد ۱ خط می‌خورد، سپس ۴۹۹ تا مضرب ۲ (به جز خود ۲)، سپس مضرب‌های فرد ۳ (زوج‌هایی که قبلاً خط خورده‌اند) به جز خود ۳ خط می‌خورند.

$$۱۰۰۰ \div ۳ \simeq ۳۳۳ \Rightarrow ۳۳۳ - \underbrace{۱}_{\text{به‌جز ۳}} = ۳۳۲ \Rightarrow ۳۳۲ \div ۲ = ۱۶۶$$

حال مضرب‌های ۵ که هنوز خط نخورده‌اند خط می‌خورد، ۱۱۵ و ۹۵ و ۸۵ و ۶۵ و ۵۵ و ۳۵ و ۲۵ یعنی ۷ تا.

$$۱ + ۴۹۹ + ۱۶۶ + ۷ = ۶۷۳$$

۱۲ - گزینه ۲

باید دید چند عدد مضرب ۵ وجود دارد که نه بر ۲ بخش‌پذیر هستند نه بر ۳.

می‌دانیم ۴۰ تا مضرب ۵ وجود دارد $(۲۰۰ \div ۵ = ۴۰)$ حالا باید دید چه تعدادی مضرب ۲ یا ۳ هستند:

این ۶ عدد مشترک هستند:

$$۴۰ \left|\frac{۲}{۲۰}\right. \quad ۴۰ \left|\frac{۳}{۱۳}\right. \quad ۴۰ \left|\frac{۶}{۶}\right. \to \text{این شش عدد مشترک هستند}$$

تعداد مضارب ۵ که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیرند.

$$۲۰ + ۱۳ - ۶ = ۲۷$$

تعداد مضارب ۵ که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند.

$$۴۰ - ۲۷ = ۱۳$$

توجه کنید فقط ۱ × ۵ خط نمی‌خورد، پس ۱۲ عدد می‌شود!

۱۳ - گزینه ۴

نکته: d, c, b, a اعداد طبیعی هستند.

آنگاه داریم:

$$(a, b) = c \to (ad, bd) = cd$$
$$(a^d, b^d) = c^d$$

طبق نکتهٔ بالا هنگامی که اعداد را ضرب در مقداری کنیم ب.م.م آنها نیز در آن مقدار ضرب می‌شود و هنگامی که اعداد را به توان می‌رسانیم ب.م.م آنها نیز به توان می‌رسد.

۱۴ - گزینه ۴ نکته ۱: اگر a بر b بخش‌پذیر باشد، آنگاه: $[a, b] = a$

نکتهٔ ۲: تعداد شمارنده‌های طبیعی برابر است با:

حاصل‌ضرب توان‌های عوامل اول که هرکدام از آنها را به‌علاوه یک کردیم.

طبق نکات بالا داریم:

$$[۱۰!, ۹!, ۸!, ۷!,] = ۱۰!$$

$$۱۰! = ۲ \times ۵ \times ۳^۲ \times ۲^۳ \times ۷ \times ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۲^۲ \times ۳ \times ۲ = ۷ \times ۵^۲ \times ۳^۴ \times ۲^۸$$

تعداد شمارنده‌های طبیعی: $\to (۸ + ۱) \times (۲ + ۱) \times (۴ + ۱) \times (۱ + ۱) = ۲۷۰$

تعداد شمارنده‌های صحیح: $۲ \times ۲۷۰ = ۵۴۰$

۱۵ - گزینه ۴ یادآوری: رابطهٔ تقسیم: باقی مانده + خارج قسمت × مقسوم علیه = مقسوم

طبق رابطهٔ تقسیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} (۱)\ \ ۴۵۲ = ab + r \\ (۲)\ \ ۲۱۴ = a'b + r \\ (۳)\ \ ۷۸ = a''b + r \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} (۱) - (۲) : ۲۳۸ = ab - a'b \to ۲۳۸ = b(a - a') \\ (۲) - (۳) : ۱۳۶ = a'b - a''b \to ۱۳۶ = b(a' - a'') \end{array}$$

$$\to ۱۳۶, ۲۳۸ \text{ بر } b \text{ بخش‌پذیر هستند} \to \begin{array}{l} ۲۳۸ = ۲ \times ۷ \times ۱۷ \\ ۱۳۶ = ۲^۳ \times ۱۷ \end{array} \to (۲۳۸, ۱۳۶) = ۲ \times ۱۷ = ۳۴$$

پس شمارنده‌های مشترک ۱, ۲, ۱۷, ۳۴ هستند و b می‌تواند هرکدام از آنها باشد.

۱۶ - گزینه ۲

$$(m,n)=۱ \Rightarrow \frac{([m,n],(m,n))}{([m,m],(n,n))}=\frac{(mn,۱)}{(m,n)}=\frac{۱}{۱}=۱$$

۱۷ - گزینه ۲ از هر کدام دو بار تکرار می‌شود.

$$(a,b)=۹=۳^۲ \quad a=۳^۲\times A\ ,\ b=۳^۲\times B \Rightarrow aa=۳^۴\times A^۲\ ,\ bb=۳^۴\times B^۲ \quad (aa,bb)=۳^۴=۸۱$$

۱۸ - گزینه ۲ نکته: تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی (شمارنده‌های طبیعی) برابر است با:

$$n=a_۱^{b_۱}\times a_۲^{b_۲}\times\cdots\times a_n^{b_n}\to(b_۱+۱)\times(b_۲+۱)\times\cdots\times(b_n+۱)$$

$$(\text{عوامل اول}=a_۱,a_۲,\cdots,a_n)$$

عدد $۲۰۱۸-۲۳=۱۹۹۵$ را تجزیه می‌کنیم و تعداد شمارنده‌های آن را بدست می‌آوریم

$$\begin{array}{r|l} ۱۹۹۵ & ۳ \\ ۶۶۵ & ۵ \\ ۱۳۳ & ۷ \\ ۱۹ & ۱۹ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۱۹۹۵=۳\times۵\times۷\times۱۹\Rightarrow(۱+۱)\times(۱+۱)\times(۱+۱)\times(۱+۱)=۱۶$$

شمارنده‌های کوچکتر از ۲۳ عبارتند از: $۲۱,۱۹,۱۵,۷,۵,۳,۱$

$\Leftarrow$ پس تعداد شمارنده $۱۶-۷=۹$ است.

۱۹ - گزینه ۴ نکته: اگر ۳ عدد متوالی در هم ضرب شوند:

۱) عدد وسط فرد باشد، ک.م.م برابر است با نصف حاصلضرب سه عدد

۲) عدد وسط زوج باشد، ک.م.م برابر است با حاصلضرب سه عدد

طبق نکتهٔ بالا گزینهٔ ۴ صحیح است.

۲۰ - گزینه ۱

از بین هر ۳ عدد متوالی یکی از آنها بر ۳ بخش‌پذیر است پس ۳۳ مضرب ۳ داریم.

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰ & ۳ \\ -\ ۹۹ & ۳۳ \\ ۱ & \end{array} \rightarrow$$

برای مضرب ۵ هم همین‌طور، پس ۲۰ مضرب ۵ داریم.

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰ & ۵ \\ -\ ۱۰۰ & ۲۰ \\ ۰ & \end{array} \rightarrow$$

$۵۳=۳۳+۲۰$ در بین این ۵۳ عدد بعضی اعداد دوبار شمرده می‌شوند آن اعداد، اعدادی هستند که هم‌مضرب ۵ هستند و هم‌مضرب ۳. درواقع مضارب ۱۵. پس به همین خاطر مضارب ۱۵ را از آنها کم می‌کنیم تا تنها یکبار شمارده شوند.

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰ & ۱۵ \\ -\ ۹۰ & ۶ \\ ۱۰ & \end{array}$$

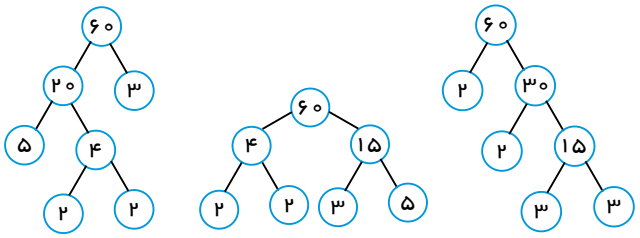
$۵۳-۶=۴۷$ عدد خط خورده ۴۷ $\rightarrow ۱۰۰-۴۷=۵۳$ عدد باقی مانده است ۵۳

۲۱ - گزینه ۴

کوچک‌ترین مضرب مشترک ۱۵ و ۶ ضلع کوچک‌ترین اتاق است که برابر است با ۳۰ ($[۶,۱۵]=۳۰$). تعداد کاشی‌های مورد نیاز برابر با نسبت مساحت‌ها است:

$$\frac{۳۰\times۳۰}{۶\times۱۵}=۵\times۲=۱۰$$

۲۲ - گزینه ۳ به شکل‌های زیر می‌توان ۶۰ را تجزیه کرد.



ولی شکل (د) ایجاد نمی‌شود.

راه سریع‌تر: در (الف) و (ب) و (ج)، ۷ دایرهٔ خالی در هر سه شکل مشترک است، ولی شکل (د) دارای ۹ دایرهٔ خالی است که با بقیه متفاوت است و یا در شکل‌های (الف) ، (ب) و (ج)، درنهایت به ۴ عدد اول در پایین‌ترین شاخهٔ نمودار می‌رسیم. اما در شکل (د) به ۵ عدد اول!

۲۳ - گزینه ۱

نکته:

$$([a,b],[a,c]) = [a,(b,c)]$$
$$[(a,b),(a,c)] = (a,[b,c])$$

طبقه نکتهٔ بالا داریم:

$$[(x,m),(x,n)] = (x,[m,n])$$
$$\rightarrow (۱۴,۲۱) = ۷$$
$$۱۴ = ۲ \times ۷$$
$$۲۱ = ۳ \times ۷$$

۲۴ - گزینه ۴ حاصل جمع ۲ عدد اول برابر ۳۶ است آن دو عدد می‌توانند:

$(۱۹,۱۷),(۲۹,۷),(۲۳,۱۳),(۳۱,۵)$

که حاصل ضرب آن‌ها عبارت است از:

$$۲۳ \times ۱۳ = ۲۹۹ \qquad ۱۹ \times ۱۷ = ۳۲۳$$
$$۳۱ \times ۵ = ۱۵۵ \qquad ۲۹ \times ۷ = ۲۰۳$$

اگر هم حاصل جمع دو عدد اول برابر باشد با ۱۰۳. آن دو عدد عبارتند از ۱۰۱ و ۲ که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با ۲۰۲.

به این ترتیب تمامی گزینه‌ها صحیح است.

۲۵ - گزینه ۱

$$A = ۲۵^۲ \times ۹^۳ \times ۲^۳ \times ۱۱ = ۲^۳ \times ۳^۶ \times ۵^۴ \times ۱۱ = (۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲) \times ۲ \times ۳^۵ \times ۵^۲ \times ۱۱$$
$$۳۰۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲$$

حالا بررسی می‌کنیم تعداد حالت‌هایی که بر ۳۰۰ بخش‌پذیر چندتاست:

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ ۲^۰ \\ ۲^۱}}{۲} \times \underset{\substack{\downarrow \\ ۳^۰ \\ \vdots \\ ۳^۵}}{۶} \times \underset{\substack{\downarrow \\ ۵^۰ \\ \vdots \\ ۵^۲}}{۳} \times \underset{\substack{\downarrow \\ ۱۱^۰ \\ ۱۱}}{۲} = ۷۲$$

۲۶ - گزینه ۳ روش اول: این سؤال را با مثال حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم: $[A,B] = D \qquad (A,B) = C$

$$A = ۴\ ,\ B = ۶ \qquad \left.\begin{matrix}(۴,۶) = ۲ \\ [۴,۶] = ۱۲\end{matrix}\right\} \Rightarrow (۲۴,۲۴) = ۲۴$$

روش دوم: $A \times B = [A,B](A,B) = CD \rightarrow (AB,CD) = (AB,AB) = AB$

۲۷ - گزینه ۴

$$۲^۲ + ۳^۲ = ۴ + ۹ = ۱۳$$

نکته: تنها اعداد اول متوالی ۲ و ۳ است.

۲۸ - گزینه ۲ از کوچکترین اعداد شروع می‌کنیم که بر ۷ باقی‌مانده ۶ بیاورند $(۷k-۱)$

این اعداد عبارتند از $۶,۱۳,۲۰,۲۷,۳۴,۴۱,\cdots$

چون ۶ با اعداد ۲۰و ۲۷ عامل مشترک دارد آن را در نظر نمی‌گیریم.

به علاوه ۲۰ و ۳۴ نیز عامل مشترک دارند لذا:

$$۱۳\ ,\ ۲۰\ ,\ ۲۷\ ,\ ۴۱\ \Rightarrow ۱۳ + ۲۰ + ۲۷ + ۴۱ = ۱۰۱$$

۲۹ - گزینه ۴ عدد به‌صورت $a^x \times b^y \times c^z$ است، ولی بر هیچ مجذور کاملی بخش‌پذیر نیست؛ یعنی توان هر سه عامل برابر است با ۱. پس عدد به شکل $a^۱ \times b^۱ \times c^۱$ خواهد بود که تعداد عوامل برابر است با $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

۳۰ - گزینه ۳

$$-۲(۳ - \underbrace{(۵-۶)^۳}_{-۱} + ۱)^۳ = -۲ \times (\underbrace{۳ - (-۱) + ۱}_{۵})^۳ = -۲ \times (۵)^۳ = -۲ \times ۱۲۵ = -۲۵۰$$

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$a = ۵۷ \Rightarrow -۲۵۰ + ۵۷ = -۱۹۳ \times$$
$$a = ۱۰۱ \Rightarrow -۲۵۰ + ۱۰۱ = -۱۴۹ \times$$
$$a = ۲۵۲ \Rightarrow -۲۵۰ + ۲۵۲ = ۲ \checkmark$$
$$a = ۳۵۲ \Rightarrow -۲۵۰ + ۳۵۲ = ۱۰۲ \times$$

۳۱ - گزینه ۱ نکته: تعداد اعداد طبیعی کمتر از n که نسبت به n، اول هستند برابر است:

$$n \times (1 - \frac{1}{p_1}) \times (1 - \frac{1}{p_2}) \times \cdots (1 - \frac{1}{p_m})$$

$p_1, p_2, \cdots p_m$ عامل‌های اول n هستند که پس الز تجزیه آن بدست می‌آیند یعنی:

$$n = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times \cdots \times p_m^{x_m}$$

۹۴۵۰	۲
۴۷۲۵	۵
۹۴۵	۳
۳۱۵	۳
۱۰۵	۳
۳۵	۵
۷	۷
۱	

$$\rightarrow 9450 = 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \Rightarrow 9450 \times (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{5}) \times (1 - \frac{1}{7})$$

$$= 9450 \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{4}{5} \times \frac{\cancel{6}}{7} = 2160$$

۳۲ - گزینه ۳ b بر a بخش‌پذیر است، بنابراین:

$$\frac{[b,(a,b)]}{(b,[a,b])} = \frac{[b,a]}{(b,b)} = \frac{b}{b} = 1$$

۳۳ - گزینه ۲ از آنجایی که a بر b بخش‌پذیر است، داریم:

$$[\overbrace{(a^2,a)}^{a}, \overbrace{(b^2,b)}^{b}] \Rightarrow \frac{a}{b} = k \Rightarrow a = bk \rightarrow [a,b] = [bk,b] = bk = a$$

۳۴ - گزینه ۱ عبارت $y = 2x$ یعنی y بر x بخش‌پذیر است.

$$\frac{[x,(y,x),y]}{(y,[x,[y,x]])} = \frac{[x,x,y]}{(y,[x,y])} = \frac{y}{(y,y)} = \frac{y}{y} = 1$$

۳۵ - گزینه ۴ باقی‌مانده‌ی تقسیم، عدد ۱ است، یعنی یکی کمتر از همه‌ی این عددها بر f بخش‌پذیر است، بنابراین:

$$(\underset{2^5 \times 3}{96}, \underset{2^3 \times 3 \times 5}{120}, \underset{2^4 \times 3^2}{144}) = 2^3 \times 3 = 24$$

۳۶ - گزینه ۴

دقت کنید اگر مثلاً عددی بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد و به آن ۱ واحد اضافه کنیم، باقی‌مانده‌اش در تقسیم بر ۱۰ برابر ۱ است، ولی اگر یک واحد کم کنیم، باقی‌مانده ۹ می‌شود چون یک بستهٔ ۱۰ تایی خراب شده و یکی‌اش را برداشته‌ایم و ۹ تا یکی می‌ماند. به همین ترتیب اگر از یک مضرب ۵ یک واحد کم کنیم، باقی‌مانده‌اش در تقسیم بر ۵ برابر ۴ می‌شود.

پس باید ک.م.م اعداد ۲ تا ۱۰ را به‌دست آوریم و منهای یک کنیم، اعداد را برای سرعت بیشتر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$2,3,4,5,6,7,8,9,10 \Rightarrow [2,4,8],[3,9],[5,10],7,6,,[5,10],7,6, \Rightarrow 8,9,10,7,6$$

چون ۹ و ۸ هستند به ۶ نیازی نیست. عددی که بر ۹ و ۸ بخش‌پذیر باشد، بر ۶ هم بخش‌پذیر است:

$$[8,10],[9,7] = 40,63 \Rightarrow [40,63] = 2520$$

$$2520 - 1 = 2519$$

۳۷ - گزینه ۴

اگر روزها را شماره‌گذاری کنیم، روزهای زوج (۲، ۴، ۶ و ...) دوست اول را می‌بیند و روزهایی که مضرب ۳ است، دومی و ... و روزهایی که مضرب ۸ است، هفتمی را می‌بیند. پس باید کوچک‌ترین عددی را به‌دست آوریم که مضرب مشترک اعداد ۲، ۳، ۴ و ... و ۸ است: این اعداد را دسته‌بندی می‌کنیم تا ساده‌تر حساب شود. ک.م.م ۲ و ۴ و ۸ برابر ۸، ک.م.م ۳ و ۶ برابر ۶ و ک.م.م ۵ و ۷ برابر ۳۵ است. پس:

$$[2,4,8],[3,6],[5,7] \Rightarrow 8,6,35 \Rightarrow [8,6] = 24$$

۳۵ و ۲۴ متباین‌اند:

$$[35,24] = 35 \times 24 = 840$$

و ۸۴۰ روز یعنی بین ۲ تا ۳ سال.

۳۸ - گزینه ۳

a بر b بخش‌پذیر باشد، a^n بر b^n نیز بخش‌پذیر است و چون b^n بر b^m بخش‌پذیر است $(m < n)$، پس a^n بر b^m نیز بخش‌پذیر است، پس:

$$(a^n, b^m) = b^m$$

از طرفی وقتی b و c متباین‌اند، به هر توانی برسند باز هم متباین‌اند! پس $(b^n, c^m) = 1$.

۳۹ - گزینه ۲

برای این‌که کم‌ترین تعداد مکعب لازم باشد، باید بزرگ‌ترین عددی را پیدا کنیم که هم ۱۲، هم ۱۸ و هم ۳۰ بر آن بخش‌پذیر باشد؛ یعنی ب.م.م این سه عدد که واضح است برابر است با ۶. پس تعداد مکعب‌ها برابر است با:

$$\frac{\overset{۵}{\cancel{۳۰}} \times \overset{۳}{\cancel{۱۸}} \times \overset{۲}{\cancel{۱۲}}}{\cancel{۶} \times \cancel{۶} \times \cancel{۶}} = ۳۰$$

۴۰ - گزینه ۳

به کمک اعداد فرد اول این اعداد را لیست می‌کنیم:

$۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$

$۳ \times ۳ \times ۵ = ۴۵$

$۳ \times ۳ \times ۷ = ۶۳$

$۳ \times ۳ \times ۱۱ = ۹۹$

$۳ \times ۵ \times ۵ = ۷۵ \Rightarrow$ یعنی ۵ عدد

۴۱ - گزینه ۴ اولین عددی که خط می‌خورد عدد یک است سپس مضرب‌های ۲ خط می‌خورند فقط توجه کنید که خود عدد ۲ خط نمی‌خورد پس $۱۰۰۰ \div ۲) - ۱ = ۴۹۹$ عدد خط می‌خورند بعد از آن مضرب‌های ۳ هستند که $۹۹۹ \div ۳) - ۱ = ۳۳۲$ عدد است که نصف آنها قبلاً در مضارب ۲ خط خورده‌اند پس $۳۳۲ \div ۲ = ۱۶۶$ عدد جدید خط می‌خوردند. حالا نوبت مضارب ۵ است که تا الان خط نخورده‌اند:

$۲۵, ۳۵, ۵۵, ۶۵, ۸۵, ۹۵, ۱۱۵, ۱۲۵$

پس جواب $۱ + ۴۹۹ + ۱۶۶ + ۸ = ۶۷۴$ است.

۴۲ - گزینه ۱

نکته:

$$[a, (a, b)] = a$$
$$(a, [a, b]) = a$$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$(\underbrace{۱۳۹۷!}_{a}, [\underbrace{(۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + ۱۳۹۷^۲)}_{b}, \underbrace{۱۳۹۷!}_{a}]) = ۱۳۹۷!$$

۴۳ - گزینه ۳ نکته : در تجزیه $n!$ به عوامل اول، توان عامل a با مجموع خارج قسمت‌های تقسیم متوالی n بر a بدست می‌آید.

می‌توانیم صورت سوال را بصورت روبه‌رو بنویسیم:

$$\frac{۲۰۱۸!}{۱۳۹۷!} = ۱۳۹۸ \times ۱۳۹۹ \times \cdots \times ۲۰۱۸$$

حالا طبق نکته بالا داریم:

$$\begin{array}{l|l} ۱۳۹۷ & ۵ \\ \quad ۲۷۹ & ۵ \\ \qquad ۵۵ & ۵ \\ \qquad\quad ۱۱ & ۵ \\ \qquad\qquad ۲ & \end{array} \qquad \rightarrow ۲۷۹ + ۵۵ + ۱۱ + ۲ = ۳۴۷$$

حالا از هم کم می‌کنیم تا جواب بدست آید.

$۵۰۲ - ۳۴۷ = ۱۵۵$

$$\begin{array}{l|l} ۲۰۱۸ & ۵ \\ \quad ۴۰۳ & ۵ \\ \qquad ۸۰ & ۵ \\ \qquad\quad ۱۶ & ۵ \\ \qquad\qquad ۳ & \end{array} \qquad \rightarrow ۴۰۳ + ۸۰ + ۱۶ + ۳ = ۵۰۲$$

۴۴ - گزینه ۳ نکته: در تجزیهٔ $n!$ به عوامل اول، توان عامل a، با مجموع خارج قسمت‌های تقسیم متوالی n بر a بدست می‌آید.

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} ۱۳۹۷ & ۵ & & & \\ ۱۰ & ۲۷۹ & ۵ & & \\ ۳۹ & ۲۵ & ۵۵ & ۵ & \\ ۳۵ & ۲۹ & ۵ & ۱۱ & ۵ \\ ۴۷ & ۲۵ & ۰۵ & ۱۰ & ۲ \\ ۴۵ & ۴ & ۵ & ۱ & \\ ۲ & & ۰ & & \end{array}$$

طبق نکته بالا: $\rightarrow ۲۷۹ + ۵۵ + ۱۱ + ۲ = ۳۴۷$

۴۵ - گزینه ۲

$۱۸ = ۲ \times ۳ \times ۳ = ۳^۲ \times ۲$

تعداد شمارنده‌ها $\rightarrow (۲+۱)\times(۱+۱)=۶$

حاصل‌ضرب شمارنده‌ها $= ۱۸^{\frac{\text{تعداد شمارنده}}{۲}} = ۱۸^{\frac{۶}{۲}} = ۱۸^{۳} = ۵۸۳۲$

۴۶ - گزینه ۲

$a\times(a+۸)=۳۸۴=۲^{۷}\times۳=۲^{۴}\times۲^{۳}\times۳=۱۶\times۲۴\Rightarrow a=۱۶\Rightarrow a+۸=۱۶+۸=۲۴\Rightarrow ۱۶+۲۴=۴۰$

۴۷ - گزینه ۱ با فاکتورگیری داریم:

$۲^{۱۳۹۱}+۲^{۱۳۹۰}+۲^{۱۳۸۹}=۲^{۱۳۸۹}(۲^{۲}+۲+۱)=۲^{۱۳۸۹}\times۷$

تعداد شمارنده‌های طبیعی $=(۱۳۸۹+۱)(۱+۱)=۱۳۹۰\times۲=۲۷۸۰$

۴۸ - گزینه ۳

$۰!=۱!=۱\ ,(n-۱)!=۱$

$n-۱=۰\Rightarrow n=۱$ یا $n-۱=۱\Rightarrow n=۲$

۴۹ - گزینه ۲

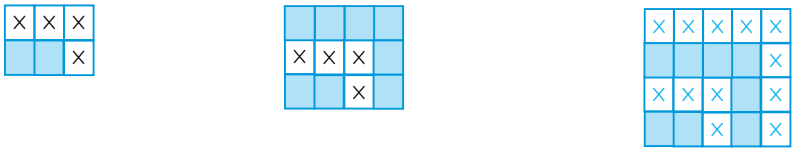
اگر دنباله‌ای تشکیل دهیم که تعداد تکه‌های کاغذ را در هر مرحله بنویسیم؛ سوال ساده می‌شود:

$۱,۷,۱۳,۱۹,\cdots$

تمام اعداد این دنباله که ۶ تا ۶ تا اضافه می‌شوند، بر ۶ باقی‌ماندهٔ ۱ دارند؛ یعنی به شکل $۶k+۱$ هستند. گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) چنین‌اند و فقط عدد ۹۵ بر ۶ باقی‌مانده‌اش ۱ نیست.

۵۰ - گزینه ۲

تعداد مربع‌ها را در هر شکل از دو طریق، شمردن و روش کلی طول × عرض به‌دست می‌آوریم:



$۲+۴=۲\times۳$ $\qquad$ $۲+۴+۶=۳\times۴$ $\qquad$ $۲+۴+۶+۸=۴\times۵$

۵۱ - گزینه ۳ عدد b می‌تواند بصورت زیر باشد:

$\boxed{۱}\ b=a^{۵}\xrightarrow{a\neq۵}۵a^{۵}\rightarrow(۱+۱)(۵+۱)=۲\times۶=۱۲$

$\boxed{۲}\ b=a^{۵}\xrightarrow{a=۵}۵^{۶}\rightarrow۶+۱=۷$

$\boxed{۳}\ b=a^{۲}c\xrightarrow{a,c\neq۵}۵a^{۲}c\rightarrow(۱+۱)(۲+۱)(۱+۱)=۲\times۳\times۲=۱۲$

$\boxed{۴}\ b=a^{۲}c\xrightarrow{a=۵}۵^{۳}c\rightarrow(۳+۱)(۱+۱)=۴\times۲=۸$

$\boxed{۵}\ b=a^{۲}c\xrightarrow{c=۵}۵^{۲}a^{۲}\rightarrow(۲+۱)(۲+۱)=۹$

عدد $۵b$، ۵ حالت دارد. ولی تعداد شمارنده‌های آن ۴ حالت دارد $۷,۸,۹,۱۲$

۵۲ - گزینه ۴ نکته: اگر مجموع شمارنده‌های عدد x را برابر y بنامیم، مجموع معکوس شمارنده‌های عدد x برابر است با: $\frac{y}{x}$

پس طبق نکته بالا $x=۳۶$ و $y=۹۱$ است و مجموع معکوس شمارنده‌های عدد x : $\frac{۹۱}{۳۶}$

۵۳ - گزینه ۲

$\sqrt{۴۴}<\sqrt{۴۹}=۷$

برای پیدا کردن اعداد اول کوچکتر از ۴۴ باید به ترتیب مضارب ۲، ۳، ۵ را خط بزنیم. در مرحله حذف مضارب عدد ۵، آخرین عددی که قبلاً خط نخورده است، عدد ۳۵ است. دقت کنید که ۴۰ قبلاً خط خورده است چون مضرب ۲ است.

۵۴ - گزینه ۳ کوچکترین عددی که بر ۵۰ و ۲۱ و ۸ بخش‌پذیر است، برابر با ک . م . م این سه عدد است؛ داریم:

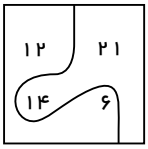
$۵۰=۵\times۵\times۲$

$۲۱=۷\times۳$

$۸=۲\times۲\times۲$

ک.م.م: $[۵\times۵\times۲\ ,\ ۷\times۳\ ,\ ۲\times۲\times۲]=۵\times۵\times۷\times۳\times۲\times۲\times۲=۴۲۰۰$

۵۵ - گزینه ۱ باید اعدادی انتخاب شوند که در جدول مضرب مشترک نداشته باشند، مثلاً ۳ و ۷ را نمی‌توان انتخاب کرد، چون عدد ۲۱ هم مضرب ۳ است هم مضرب ۷. ولی مضارب ۶ و ۷ را می‌توان به شکل زیر جدا کرد:



۵۶ - گزینه ۲

ارقام را برای بخش‌پذیری بر ۹ به‌دست می‌آوریم، می‌توانیم ۹ تا ۹ تا جمع‌ها را کنار بگذاریم تا سریع‌تر به جواب برسیم. به هر حال رقم $\star$ باید ۵ باشد تا عدد حاصل بر ۹ بخش پذیر شود.

۵۷ - گزینه ۲ با توجه به رابطهٔ $۷(p^۲+q^۲+r^۲)=۱۹۱۸-۲pqr$، سمت چپ تساوی بر ۷ بخش پذیر است. پس سمت راست هم بر ۷ بخش پذیر است. به این ترتیب $۲pqr$ باید بر ۷ بخش پذیر باشد. از آنجایی که r,q,p اعداد اول هستند پس یکی از آن‌ها ۷ است. ما $r=۷$ فرض می‌کنیم بنابراین:

$$۷(p^۲+q^۲+r^۲)=۱۹۱۸-۲pqr \xrightarrow{r=۷} p^۲+q^۲+۴۹=۲۷۴-۲pq \to p^۲+۲pq+q^۲=۲۲۵ \to (p+q)^۲=۱۵^۲$$
$$\to p+q=۱۵$$

جمع دو عدد اول فرد است پس یکی از آن‌ها زوج و برابر با ۲ است.

$$۲+q=۱۵ \to q=۱۵-۲=۱۳$$