

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ می‌دانیم همواره ب. م. م. دو عدد شمارنده ک. م. م. آن دو عدد است. در بین گزینه‌ها فقط عدد ۳۶ بر ۱۲ بخش پذیر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

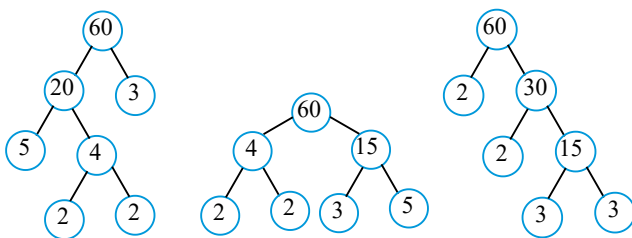
$$2100 = 3 \times 7 \times 2^2 \times 5^2$$

شمارنده اول ۲۱۰۰ برابر است با:

۳، ۷، ۲، ۵

پس ۴ شمارنده اول دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ به شکل‌های زیر می‌توان ۶۰ را تجزیه کرد.



ولی شکل (د) ایجاد نمی‌شود.

راه سریع‌تر: در (الف) و (ب) و (ج)، ۷ دایره خالی در هر سه شکل مشترک است، ولی شکل (د) دارای ۹ دایره خالی است که با بقیه متفاوت است و یا در شکل‌های (الف)، (ب) و (ج)، در نهایت به ۴ عدد اول در پایین‌ترین شاخه نمودار می‌رسیم. اما در شکل (د) به ۵ عدد اول!

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

دقت کنید اگر مثلاً عددی بر ۱۰ بخش پذیر باشد و به آن ۱ واحد اضافه کنیم، باقی‌مانده‌اش در تقسیم بر ۱۰ برابر ۱ است، ولی اگر یک واحد کم کنیم، باقی‌مانده ۹ می‌شود چون یک بسته ۱۰ تایی خراب شده و یکی‌اش را برداشته‌ایم و ۹ تا یکی می‌ماند. به همین ترتیب اگر از یک مضرب ۵ یک واحد کم کنیم، باقی‌مانده‌اش در تقسیم بر ۵ برابر ۴ می‌شود. پس باید ک.م.م اعداد ۲ تا ۱۰ را به دست آوریم و منهای یک کنیم، اعداد را برای سرعت بیشتر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \Rightarrow [2, 4, 8], [3, 9], [5, 10], 6, 7, [5, 10], 6, 7, 8, 9, 10, 6$$

چون ۹ و ۸ هستند به ۶ نیازی نیست. عددی که بر ۹ و ۸ بخش پذیر باشد، بر ۶ هم بخش پذیر است:

$$[8, 10], [9, 7] = 40, 63 \Rightarrow [40, 63] = 2520$$

$$2520 - 1 = 2519$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

اگر روزها را شماره گذاری کنیم، روزهای زوج (۲، ۴، ۶ و ۸) دوست اول را می‌بیند و روزهایی که مضرب ۳ است، دومی و ۱۰۰۰ و روزهایی که مضرب ۸ است، هفتمی را می‌بیند. پس باید کوچک‌ترین عددی را به دست آوریم که مضرب مشترک اعداد ۲، ۳، ۴ و ۸ است: این اعداد را دسته‌بندی می‌کنیم تا ساده‌تر حساب شود. ک.م.م ۲ و ۴ و ۸ برابر ۸، ک.م.م ۳ و ۶ برابر ۶ و ک.م.م ۵ و ۷ برابر ۳۵ است. پس:

$$[2, 4, 8], [3, 6], [5, 7] \Rightarrow 8, 6, 35 \Rightarrow [8, 6] = 24$$

۳۵ و ۲۴ متباین‌اند:

$$[35, 24] = 35 \times 24 = 840$$

و ۸۴۰ روز یعنی بین ۲ تا ۳ سال.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

a بر b بخش پذیر باشد، a^n بر b^n نیز بخش پذیر است و چون b^m بر b^n بخش پذیر است ($m < n$)، پس a^n بر b^m نیز بخش پذیر است، پس:

$$(a^n, b^m) = b^m$$

از طرفی وقتی b و c متباین‌اند، به هر توانی برسند باز هم متباین‌اند! پس $(b^n, c^m) = 1$.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

برای این که کم‌ترین تعداد مکعب لازم باشد، باید بزرگ‌ترین عددی را پیدا کنیم که هم ۱۲، هم ۱۸ و هم ۳۰ بر آن بخش پذیر باشد؛ یعنی ب.م.م این سه عدد که واضح است برابر است با ۶. پس تعداد مکعب‌ها برابر است با:

$$\frac{\frac{5}{3} \times \frac{3}{18} \times \frac{2}{14}}{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}} = 30$$

کوچکترین عددی که بر ۵۰ و ۲۱ و ۸ بخش پذیر است، برابر با ک. م. ا این سه عدد است؛ داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$50 = 5 \times 5 \times 2$$

$$21 = 7 \times 3$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

$$\text{ک.م.م: } [5 \times 5 \times 2, 7 \times 3, 2 \times 2 \times 2] = 5 \times 5 \times 7 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 4200$$

a و b دو عدد متوالی اند، بنابراین: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{[a, [a, b]]}{(b, (a, b))} = \frac{[a, ab]}{(b, 1)} = \frac{ab}{1} = ab$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$\frac{(x, x \times x \times y) \div [x \times yx \times y \times x, x \times y \times y, x \times y]}{(x \times x \times x \times y \times y \times y, y \times y \times x \times x)}$$

$$= \frac{x \div x \times x \times x \times y \times y}{x \times x \times y \times y} = \frac{\cancel{x} xxyy}{xxyy} = \frac{1}{xxyy} = \frac{1}{xxxyyyy} = \frac{1}{x^4 y^4}$$

ابتدا عدد ۱۵۰ را تجزیه می کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

چون $(a, b) = 1$ و $a > b$ است پس:

$$\begin{aligned} a &= 5^2 & a &= 2 \times 5^2 & a &= 3 \times 5^2 & a &= 2 \times 3 \times 5^2 \\ b &= 2 \times 3 & b &= 3 & b &= 2 & b &= 1 \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$\begin{aligned} & 2^{1398} + 2^{1397} + 2^{1396} \xrightarrow{\text{عکس عمل توزیع پذیری}} 2^{1396} (2^2 + 2 + 1) = 2^{1396} \times 7 \\ & \rightarrow (1396 + 1)(1 + 1) = 1397 \times 2 = 2794 \quad \text{تعداد شمارنده ها مثبت:} \end{aligned}$$

مقدار x, y, z را بدست می آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$x: 11 \times 11^{13} \times 13^{11} = 11^{14} \times 13^{11} \rightarrow (14 + 1)(11 + 1) = 15 \times 12 = 180$$

$$y: 13 \times 11^{13} \times 13^{11} = 11^{13} \times 13^{12} \rightarrow (13 + 1)(12 + 1) = 14 \times 13 = 182$$

$$\begin{aligned} z: 5 \times 11^{13} \times 13^{11} &\rightarrow (1 + 1)(13 + 1)(11 + 1) = 2 \times 14 \times 12 = 336 \\ \Rightarrow x &< y < z \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$12a = 2^2 \times 3 \times a \quad \text{و} \quad 18a = 2 \times 3^2 \times a$$

شمارنده های مشترک با کمترین توان $a = 7 \Rightarrow a = 2 \times 3 \times a = 42$ به مم

شمارنده های مشترک با بیشترین توان و غیر مشترک ها $2^2 \times 3^2 \times a = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$ به مم

طبق فرض سوال داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$(A, B) = 22 = 2 \times 11$$

$$[A, B] = 330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$$

پس طبق فرض هر دو عدد عامل های ۲ و ۱۱ دارند و توان هر دو یک است از آنجایی که بر هم بخش پذیر نیستند پس یکی عامل ۳ دارد و دیگری عامل ۵ دارد.

$$2 \times 3 \times 11 + 2 \times 5 \times 11 = 66 + 110 = 176$$

باید به طور مساوی ضربها را بین A و B قسمت کنیم، تا حداکثر مقسوم علیه مشترک را دو عدد داشته باشند: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

۶۴۸	۲	
۳۲۴	۲	
۱۶۲	۲	
۸۱	۳	$648 = 2^3 \times 3^4$
۲۷	۳	$A = 2^2 \times 3^2$
۹	۳	$B = 2 \times 3^2$
۳	۳	
۱		

$$\Rightarrow (A, B) = 2 \times 3^2 = 18$$

نکته ۱: اگر a بر b بخش پذیر باشد، آنگاه: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$[a, b] = a$$

نکته ۲: تعداد شمارنده های طبیعی برابر است با:

حاصل ضرب توان‌های عوامل اول که هر کدام از آنها را به علاوه یک کردیم.
طبق نکات بالا داریم:

$$[10!, 9!, 8!, 7!,] = 10!$$

$$10! = 2 \times 5 \times 3^2 \times 2^3 \times 7 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2^2 \times 3 \times 2 = 7 \times 5^2 \times 3^4 \times 2^8$$

$$\rightarrow (8+1) \times (2+1) \times (4+1) \times (1+1) = 270 \quad \text{تعداد شمارنده‌های طبیعی:}$$

$$2 \times 270 = 540 \quad \text{تعداد شمارنده‌های صحیح:}$$

نکته: اگر ۳ عدد متوالی در هم ضرب شوند: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

(۱) عدد وسط فرد باشد، ک.م.م برابر است با نصف حاصلضرب سه عدد

(۲) عدد وسط زوج باشد، ک.م.م برابر است با حاصلضرب سه عدد

طبق نکته بالا گزینه ۴ صحیح است.

یادآوری: رابطه تقسیم: باقی مانده + خارج قسمت \times مقسوم علیه = مقسوم ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

طبق رابطه تقسیم داریم:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 452 = ab + r \\ (2) \quad 214 = a'b + r \\ (3) \quad 78 = a''b + r \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} (1) - (2) : 238 = ab - a'b \rightarrow 238 = b(a - a') \\ (2) - (3) : 136 = a'b - a''b \rightarrow 136 = b(a' - a'') \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 238 = 2 \times 7 \times 17 \\ 136 = 2^3 \times 17 \end{array} \rightarrow (238, 136) = 2 \times 17 = 34$$

پس شمارنده‌های مشترک ۱، ۲، ۱۷، ۳۴ هستند و b می‌تواند هر کدام از آنها باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$(m, n) = 1 \Rightarrow \frac{([m, n], (m, n))}{([m, m], (n, n))} = \frac{(mn, 1)}{(m, n)} = \frac{1}{1} = 1$$

از هر کدام دو بار تکرار می‌شود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$(a, b) = 9 = 3^2 \quad a = 3^2 \times A, \quad b = 3^2 \times B \Rightarrow aa = 3^4 \times A^2, \quad bb = 3^4 \times B^2 \quad (aa, bb) = 3^4 = 81$$