

پاسخنامه تشریحی

1 2 3 4 1

$$A = \mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{r}}{A} \rightarrow \mathfrak{r} = \mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} + 1 = \mathfrak{r}$$

با قرار دادن گزینه ۱ مشخص می‌شود که $A = 3$ است، زیرا:

1 2 3 4 2

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{\cancel{\frac{1}{3^{r_0}}}} \\ &\quad \underbrace{A - \frac{1}{3^{r_0}}} \\ \rightarrow rA &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{r_0}} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفریق}} rA = 1 - \frac{1}{3^{r_0}} \rightarrow A = \frac{3^{r_0} - 1}{r \times 3^{r_0}}$$

1 2 3 4 5

$$\begin{array}{ll} k = \circ \rightarrow A = 1 & , \quad k = 1 \rightarrow A = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{\mathfrak{r}} \\ k = \mathfrak{r} \rightarrow A = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{y}} & , \quad k = \mathfrak{r} \rightarrow A = \frac{\mathfrak{r}}{1 \circ} = \frac{\mathfrak{r}}{\Delta} \end{array}$$

مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار k \uparrow ، مقدار کل کسر \downarrow کوچک‌تر می‌شود. بنابراین گزینه‌ی (۳) و (۴) نادرست هستند.

در مقدار k های خیلی بزرگ عدد $+1$ در صورت و -1 در صورت بی تأثیر است و -3 برابر صورت می شود پس کسر مورد نظر به $\frac{1}{3}$ نزدیک تر می شود.

1 2 3 4 5

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \cdots$$

$$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots) + \cdots$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

•
•
•

$$S = A + B + C + \dots = 1 + \underbrace{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \dots}_A = 1 + A = 1 + 1 = 2$$

کسرہا را بہ صورت زیر می نویسیم:

1 2 3 4 5

$$\frac{\epsilon}{(n+3)+\epsilon}, \frac{\delta}{(n+3)+\delta}, \frac{r}{(n+3)+r}$$

بنابراین $n + 3$ باید کوچکترین مضرب مشترک ۴ و ۵ و ۶ باشد یعنی ۶۰، پس:

1 2 3 4 5

خب قطعاً باید ۵ را بر ۷ تقسیم کنیم؛ ولی نوشتن هزار تا رقم که عقلانی و منطقی نیست!

$$5 \div 7 = 0,714285714285714285714285\ldots$$

در نوشتن ارقام اعشاری ۶ تا ۶ تا تکرار وجود دارد، پس هزار را بر ۶ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 6 \\ 1000 \overline{) 166} \\ 4 \end{array}$$

۴ تا باقی مانده می آورد؛ یعنی ۱۶۶ تا بسته ۶ تایی ۴+ تا می شود ۱۰۰۰ تا. پس هزارمین رقم اعشاری با چهارمین رقم برابر است؛ چهارمین رقم هم که رقم ۲ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$\frac{3}{7} = 0.428571428571428571 \dots = 0.428571$$

هر ۶ رقم گردش داریم و ارقام تکرار می شود.

$$\begin{array}{r} 2006 \overline{) 334} \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 26 \\ 24 \\ \hline 2 \end{array}$$

دوره ی گردش ۴۲۸۷۵۱، ۳۳۴ بار تکرار شده است.

و رقم ۲۰۰۶ ام، دومین رقم دوره گردش خواهد بود یعنی رقم ۲، پس گزینه ۲ صحیح است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

نکته: هرگاه در مخرج کسری ۲ عدد در هم ضرب شوند و در صورت آنها اختلاف دو عدد ضرب شده وجود داشته باشد، می توان آن کسر را به شکل تفاضل دو

کسر نوشت.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{121}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{121} = \frac{120}{121}$$

با قرار دادن $x = 3k$ و $y = 4k$ در گزینه ها، مشخص می شود عبارت گزینه ۴ نادرست است.

$$\frac{3k - 4k}{4k} = \frac{-k}{4k} = -\frac{1}{4} \neq \frac{1}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$\frac{75}{17} = 4 \frac{7}{17} = 4 + \frac{1}{\frac{17}{7}} = 4 + \frac{1}{2 \frac{2}{7}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow y = 2, x = 2, z = 3$$

اگر عدد اول را A و عدد دوم را B فرض کنیم:

$$\frac{3}{8} \times (A + B) = \frac{2}{7} \rightarrow \frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{3} + B\right) = \frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{3} + B = \frac{2}{7} \div \frac{3}{8} = \frac{2}{7} \times \frac{8}{3} = \frac{16}{21} \rightarrow \frac{1}{3} + B = \frac{16}{21} \rightarrow B = \frac{16}{21} - \frac{1}{3} = \frac{16-7}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

همان طور که از صورت مسئله برداشت می شود، ب م م x و y ۱۰ است؛ یعنی نسبت به هم اول می باشند. از طرفی گفته شده است که $\frac{x+14}{y} = \frac{x+14}{y+35}$ است، پس:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

با طرفین وسطین کردن رابطه خواهیم داشت:

$$x(y+35) = y(x+14) \rightarrow \cancel{yx} + 35x = \cancel{yx} + 14y$$

$$35x = 14y$$

۳۵ برابر عدد x با ۱۴ برابر عدد y برابر است، یعنی:

$$\frac{x}{y} = \frac{14}{35} \rightarrow x = 14, y = 35$$

$$x + y = 14 + 35 = 49$$

و عدد ۴۹ بر ۷ بخش پذیر است، پس گزینه ۱ صحیح است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$\frac{12}{11} + \frac{13}{22} + \frac{14}{33} + \frac{15}{44} + \frac{16}{55} + \frac{17}{66} + \frac{18}{77} - \frac{11}{11} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{12}{11} - \frac{11}{11}\right) + \left(\frac{13}{22} - \frac{11}{22}\right) + \left(\frac{14}{33} - \frac{11}{33}\right) + \left(\frac{15}{44} - \frac{11}{44}\right) + \left(\frac{16}{55} - \frac{11}{55}\right) + \left(\frac{17}{66} - \frac{11}{66}\right) + \left(\frac{18}{77} - \frac{11}{77}\right)$$

$$= \frac{1}{11} + \frac{2}{22} + \frac{3}{33} + \frac{4}{44} + \frac{5}{55} + \frac{6}{66} + \frac{7}{77} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11}$$

$$= 7 \times \frac{1}{11} = \frac{7}{11}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = 1 \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = 1$$

وقتی حاصل تقسیم دو کسر برهم برابر با یک باشد پس حتما دو کسر باهم برابرند، یعنی:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{d}{c} \times \frac{a}{b} = 1, \quad \frac{b}{a} \times \frac{c}{d} = 1$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\left(\frac{d}{c} \times \frac{a}{b}\right)^{10000}}{10000 \left(\frac{b}{a} \times \frac{c}{d}\right)} = \frac{1^{10000}}{10000} = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$A = \frac{2-1}{1 \times 2} + \frac{3-2}{2 \times 3} + \dots + \frac{10-9}{9 \times 10} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{9}} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{3-1}{1 \times 2} + \frac{5-3}{3 \times 5} + \dots + \frac{11-9}{9 \times 11} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \dots + \cancel{\frac{1}{9}} - \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{11}$$

$$\Rightarrow A \times B = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{10} \right) \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{11} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} \times \frac{10}{11} = \frac{9}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{22}$$

در این سوال سعی می‌کنیم یک الگو پیدا کنیم تا از محاسبات طولانی و خسته‌کننده فرار کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} = \frac{1}{5} \\ &\vdots \\ \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} - \dots - \frac{1}{1396 \times 1397} &= \frac{1}{1397} \end{aligned}$$

ابتدا هر کسر را در ۲ ضرب کرده و سپس بر ۲ تقسیم می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

راه اول: داریم:

$$\begin{aligned} 2 \times \left(\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{19 \times 21} \right) \div 2 \\ = \left(\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{19 \times 21} \right) \div 2 = \left(\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right) \div 2 \\ = \left(1 - \frac{1}{21} \right) \div 2 = \frac{20}{21} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

راه دوم: فرمول مهم (کسرهای شبه تلسکوپی)

$$\Rightarrow \frac{\text{داریم}}{\text{می‌خواهیم}} \times \left(\frac{1}{\text{اولی}} - \frac{1}{\text{آخری}} \right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{20}{21} = \frac{10}{21}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$\frac{53}{17} = 3 + \frac{1}{x + \frac{1}{y}} \rightarrow \frac{53}{17} = 3 + \frac{2}{17} = 3 + \frac{1}{\frac{17}{2}} = 3 + \frac{1}{8 + \frac{1}{2}}$$

$$\text{پس } x = 8, \quad y = 2 \Rightarrow x + y = 10$$

از راهبرد حل مسأله ساده‌تر می‌توان حل کرد. جایگزین عدد ۱۷۳۲ عددی ساده‌تر مثل عدد ۲ قرار می‌دهیم، بنابراین داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$x = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}, \quad y = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 2\frac{1}{\frac{5}{2}} = 2\frac{2}{5}$$

$$z = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 2 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 2\frac{5}{12}$$

$$2\frac{1}{2} > 2\frac{5}{12} > 2\frac{2}{5} \rightarrow x > z > y$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

طبق گزینه‌ها A عدد طبیعی است، پس:

$$2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{2 + \dots}} \rightarrow A$$

$$\Rightarrow A = 2 + \frac{3}{A}$$

با امتحان عدد گزینه‌ها ← گزینه ۳ درست است:

$$3 = 2 + \frac{3}{3} \Rightarrow 3 = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$\begin{aligned} &: \frac{5}{4} \left(\frac{7-3}{3 \times 7} + \frac{11-7}{7 \times 11} + \frac{15-11}{11 \times 15} + \dots + \frac{43-39}{39 \times 43} \right) \\ \text{روش اول} &= \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{39} - \frac{1}{43} \right) \\ &= \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{43} \right) = \frac{5}{4} \times \frac{40}{129} = \frac{50}{129} \end{aligned}$$

فرمول مهم (کسرهای شبه تلسکوپی):

$$\text{روش دوم: } \frac{\text{داریم}}{\text{می‌خواهیم}} \times \left(\frac{1}{\text{اولی}} - \frac{1}{\text{آخری}} \right) = \frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{43} \right) = \frac{5}{4} \times \frac{40}{129} = \frac{50}{129}$$

نکته: به عمل $a \times (b + c) = ab + ac$ توزیع پذیری می‌گویند و به انجام عمل عکس آن فاکتورگیری یا تبدیل جمع به ضرب می‌گویند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

حل:

$$\frac{2017 \times 2018 - 2017 \times 1397}{2018 - 1397} \xrightarrow[\text{را انجام می‌دهیم.}]{\text{عکس عمل توزیع پذیری}} \frac{2017(2018 - 1397)}{(2018 - 1397)} = 2017$$

نکته: هرگاه صورت دو کسر را با هم و مخرج همان دو کسر را با یکدیگر جمع کنیم، کسر به وجود آمده بین دو کسر اولیه است که در آن اعداد a, b, c و d هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

هستند.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

حل:

گزینه (۱): طبق نکته بالا صحیح می‌باشد.

گزینه (۲):

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{3a}{3b} \\ \frac{c}{d} &= \frac{4c}{4d} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{a}{b} < \frac{3a+4c}{3b+4d} < \frac{c}{d}$$

گزینه (۳):

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{2,5a}{2,5b} \\ \frac{c}{d} &= \frac{-1,5c}{-1,5d} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{a}{b} < \frac{2,5a-1,5c}{2,5b-1,5d} < \frac{c}{d}$$

گزینه (۴): اگر $a=3, b=2, c=2, d=1$ در نظر گرفته شود، در رابطه گزینه (۴) صدق نمی‌کند.

زیرا صورت عبارت حاصل جمع دو عدد a و b می‌باشد که بر a تقسیم گردیده و قطعاً همواره کسر بزرگتر از واحد خواهد بود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2 \times 3} \times \frac{1}{4 \times 5} \times \frac{1}{6 \times 7} \times \dots \times \frac{1}{48 \times 49} \\ &= \frac{1}{3 \times 4} \times \frac{1}{5 \times 6} \times \frac{1}{7 \times 8} \times \dots \times \frac{1}{49 \times 50} \\ &= \frac{\cancel{2} \times \cancel{4} \times \cancel{6} \times \dots \times \cancel{48}}{2 \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times \cancel{7} \times \dots \times \cancel{49}} \times \frac{50}{\cancel{49} \times \cancel{48}} = \frac{50}{2} = 25 \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{24} + \frac{4}{120}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{30} = \frac{60 + 40 + 15 + 4}{120} = \frac{119}{120}$$

نکته: هرگاه در مخرج کسری دو عدد در هم ضرب شوند و در صورت آن اختلاف دو عدد ضرب شده وجود داشته باشد، می‌توان آن کسر را به شکل تفاضل دو

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

کسر نوشت.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+5}$$

$$= \frac{3n + 5 - 2}{2 \times (3n + 5)} = \frac{3n + 3}{6n + 10}$$

۲۸) ابتدا کسر داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\frac{3234 \div 7}{4158 \div 7} = \frac{462 \div 22}{594 \div 22} = \frac{21 \div 3}{27 \div 3} = \frac{7}{9} \rightarrow a = 7 \text{ و } b = 9 \rightarrow a + b = 16$$

۲۹) نکته: مجموع هر عدد مثبت با معکوسش همواره بزرگ‌تر یا مساوی عدد ۲ و مجموع هر عدد منفی با معکوسش همواره کمتر یا مساوی ۲- است.

$$n > 0 \rightarrow n + \frac{1}{n} \geq 2$$

$$n < 0 \rightarrow n + \frac{1}{n} \leq -2$$

۳۰) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} & \left(\frac{12}{11} - 1 \right) + \left(\frac{13}{22} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{14}{33} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{15}{44} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{16}{55} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{17}{66} - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{11} + \frac{2}{22} + \frac{3}{33} + \frac{4}{44} + \frac{5}{55} + \frac{6}{66} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

۳۱) ابتدا صورت و مخرج کسر داشته را بر ب م آن‌ها تقسیم می‌کنیم تا کسر حاصل ساده‌تر شود.

$$(764, 955) = 191 \rightarrow \frac{764 \div 191}{955 \div 191} = \frac{4}{5}$$

اگر صورت و مخرج کسر $\frac{4}{5}$ را در ۳۸ ضرب کنیم کسر $\frac{152}{190}$ بدست می‌آید و اولین کسری است که صورتش از ۱۵۰ بیشتر است، اگر صورت و مخرج کسر $\frac{4}{5}$ را در ۶۹ ضرب کنیم آخرین

کسری بدست می‌آید که مخرجش از ۳۵۰ کمتر است داریم:

$$\frac{4 \times 38}{5 \times 38} = \frac{152}{190} = \frac{4 \times 39}{5 \times 39} = \frac{156}{195}, \frac{160}{200}, \dots, \frac{4 \times 69}{5 \times 69} = \frac{276}{345} \rightarrow 38, 39, \dots, 69$$

$$69 - 38 + 1 = 31 + 1 = 32$$

تعداد کسرها با تعداد اعداد از ۳۸ تا ۶۹ برابر است با: