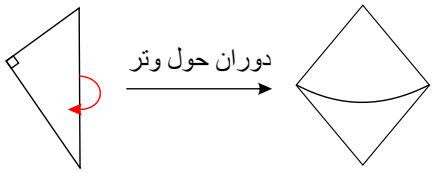
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲



۲ - گزینه ۴ نکته: قطر مکعب به ضلع a از رابطهٔ $\sqrt{۳}a$ به دست می‌آید.

$\Rightarrow \sqrt{۳}a = \sqrt{۱۲} \Rightarrow a = \sqrt{۴} = ۲$

ضلع مکعب محاط شده در درون استوانه برابر ۲ است.

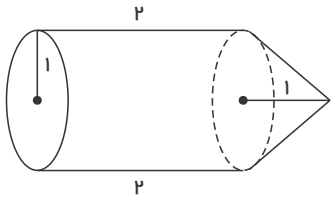
در نتیجه قطر قاعدهٔ این استوانه برابر قطر مربّع (وجه بالایی مکعب) است.

قطر مربّع $= ۲\sqrt{۲} =$ قطر قاعدهٔ استوانه $\Rightarrow$ شعاع قاعدهٔ استوانه $= \sqrt{۲}$

$\Rightarrow a = ۲$

$V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \pi(\sqrt{۲})^۲ \times ۲ = ۴\pi$

۳ - گزینه ۲ شکل زیر از یک استوانه و یک مخروط تشکیل شده است.



حجم شکل حاصل $= V_{\text{استوانه}} + V_{\text{مخروط}} =$

$$\pi(۱)^۲ \times ۲ + \frac{۱}{۳}\pi(۱)^۲ \times ۱ = ۲\pi + \frac{۱}{۳}\pi = \frac{۷}{۳}\pi$$

۴ - گزینه ۴ عبارت اول صحیح است. چرا که داریم:

کره با شعاع ۳ $V = \frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳ = \frac{۴\pi \times ۲۷}{۳} = ۳۶\pi$

عبارت دوم نادرست است؛ چرا که از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر دو مخروط ایجاد می‌شود.

عبارت سوم نیز صحیح است؛ چرا که یک چهاروجهی منتظم دارای ۶ یال است.

عبارت چهارم صحیح است؛ چرا که داریم:

جانبی استوانه به شعاع r و ارتفاع r $S =$ محیط قاعده $\times$ ارتفاع $= ۲\pi r \times r = ۲\pi r^۲$

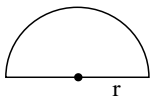
۵ - گزینه ۴ حجم منشور برابر است با مساحت مربعی به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است. مساحت قاعده در ارتفاع، داریم:

مساحت قاعده $= \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ \times ۴}{۲} = ۴\sqrt{۳} \rightarrow$ حجم منشور $V = ۳ \times ۴\sqrt{۳} = ۱۲\sqrt{۳}$

مساحت جانبی هم برابر است با: محیط قاعده $\times$ ارتفاع.

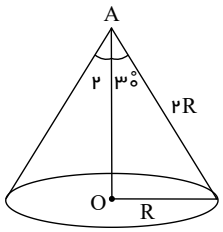
$۳ \times (۴ \times ۳) = ۳۶$

۶ - گزینه ۲ ابتدا محیط نیم‌دایره را محاسبه می‌کنیم که برابر πr است. حال این مقدار را برای محیط قاعدهٔ مخروط (دایره به شعاع R) قرار می‌دهیم.



$\pi r = ۲\pi R \Rightarrow r = ۲R$

و باتوجّه به اینکه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، پس $\hat{A}_۱ = ۳۰^\circ$ در نتیجه زاویهٔ رأس مخروط برابر $۲ \times ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$ است.



۷ - گزینه ۳

مخروط بزرگ $V = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲} h = \frac{۱}{۳}\pi(۳)^{۲} \times ۸ = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۹ \times ۸ = ۲۴\pi$

مخروط کوچک $V = \frac{۱}{۳}\pi R'^{۲} h' = \frac{۱}{۳}\pi(۱)^{۲} \times ۳ = \frac{۱}{\cancel{۳}_{۱}}\pi \times \cancel{۳}^{۱} = \pi$

حجم فضای بین دو مخروط $= ۲۴\pi - \pi = ۲۳\pi$

۸ - گزینه ۲ هنگامی که می‌گوید منشور ۵ پهلو یعنی قاعدهٔ آن ۵ ضلعی منتظم است و منشور قائم است. پس داریم:

$۵ \times (۰/۵ \times ۲۰) = ۵ \times ۱۰ = ۵۰(m)^{۲}$

۹ - گزینه ۲ مساحت جانبی استوانه برابر است با: محیط قاعده × ارتفاع.

ارتفاع استوانه $= h$ ، شعاع قاعده $= r$

مساحت جانبی اولیه $= ۲r\pi \times h = ۲rh\pi$

مساحت جانبی ثانویه $= ۲(۳r)\pi \times h = ۶rh\pi$

در نتیجه داریم:

$\rightarrow \frac{۶rh\pi}{۲rh\pi} = ۳$

۱۰ - گزینه ۲

$V_{۱} = V_{۲} \rightarrow \pi r_{۱}^{۲} h_{۱} = \pi r_{۲}^{۲} h_{۲} \xrightarrow{r_{۱} = ۳r_{۲}} \pi ۹ r_{۲}^{۲} h_{۱} = \pi r_{۲}^{۲} h_{۲}$

$\rightarrow ۹h_{۱} = h_{۲} \rightarrow \frac{h_{۱}}{h_{۲}} = \frac{۱}{۹}$

۱۱ - گزینه ۴ نکته: مساحت کل مکعب مستطیلی با ابعاد a، b و c برابر است با:

مساحت کل $= ۲(ab + ac + bc)$

در واقع سؤال از ما مساحت کل مکعب را می‌خواهد:

$۲ \times (۳ \times ۴ + ۴ \times ۵ + ۳ \times ۵) = ۲ \times (۱۲ + ۲۰ + ۱۵) = ۲ \times ۴۷ = ۹۴$

علت ضرب در ۲ بالا مشخص است، زیرا از هر نوع مستطیل دو تا داریم.

۱۲ - گزینه ۴ باتوجّه به فرض مسئله حجم استوانه برابر حاصل جمع حجم نیم‌کره و مخروط است.

$V_{\text{استوانه}} = V_{\text{نیم‌کره}} + V_{\text{مخروط}}$

$\pi R^{۲} h = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} + \frac{۱}{۳} \times \pi R^{۲} \cdot ۲h$

از $\pi R^{۲}$ فاکتورگیری می‌کنیم:

$\pi R^{۲} = \frac{۲}{۳}\pi R^{۳} + \frac{۲}{۳}\pi R^{۲} h$

$\pi R^{۲} h = \pi R^{۲}(\frac{۲}{۳}R + \frac{۲}{۳}h)$

$\Rightarrow h = \frac{۲}{۳}R + \frac{۲}{۳}h \Rightarrow h - \frac{۲}{۳}h = \frac{۲}{۳}R$

$\Rightarrow \frac{۱}{۳}h = \frac{۲}{۳}R \Rightarrow h = ۲R$

۱۲ - گزینه ۳ باتوجّه به اینکه مساحت کل مکعب بر ضلع a برابر $۶a^{۲}$ و حجم مکعب به ضلع a برابر $a^{۳}$ است، پس:

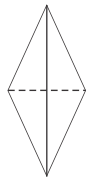
$\frac{۶a^{۲}}{a^{۳}} = ۱ \Rightarrow \frac{۶}{a} = ۱ \Rightarrow a = ۶$

مساحت جانبی مکعب به ضلع a برابر $۴a^{۲}$ است.

$\Rightarrow ۴ \times ۶^۲ = ۱۴۴$

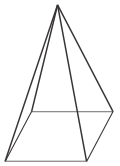
۱۴ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. چهاروجهی منتظم هرمی است که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.



گزینهٔ ۲: نادرست. اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم، حجم آن ۸ برابر می‌شود.

گزینهٔ ۳: نادرست. هرم منتظم شکلی است که قاعدهٔ آن شکل منتظمی باشد و ممکن است وجه‌های آن مثلث متساوی‌الاضلاع نباشد.



گزینهٔ ۴: درست.

حجم استوانه به صورت $\pi r^۲ h$ است و اگر $r = a$ و $h = a$ آنگاه:

$\pi r^۲ h = \pi a^۳$

۱۵ - گزینه ۱ ابتدا باتوجه به مساحت دایره، شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

دایره $S = \pi r^۲ = ۱۰۰\pi \Rightarrow r^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow r = ۱۰$

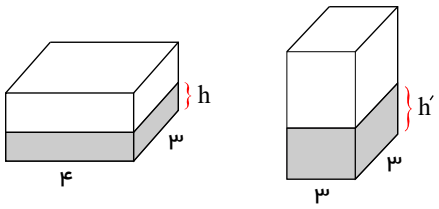
حال برای به دست آوردن کمان $A\widehat{C}B$ کافیست $\frac{۳}{۴}$ محیط دایره را به دست آوریم:

محیط دایره $\frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴} \times ۲۰\pi = ۱۵\pi$

۱۶ - گزینه ۴

$(۱) \rightarrow$ آب در این حالت $V = ۴ \times ۳ \times h = ۱۲h$

$(۲) \rightarrow$ آب در این حالت $V = ۳ \times ۳ \times h' = ۹h'$



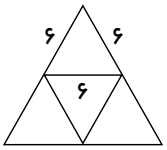
(۱) (۲)

چون مقدار آب داخل مکعب ثابت است پس حجم هر دو ثابت و با هم برابر است.

$۱۲h = ۹h' \rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$

۱۷ - گزینه ۳

گسترده‌ی هرم به شکل زیر است. کافی است مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۶cm$ را حساب کرده و در چهار ضرب کنیم تا مساحت کل هرم به دست آید.



نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با:

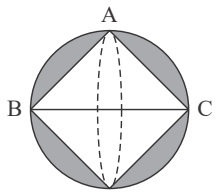
$$\frac{\sqrt{۳}a^۲}{۴}$$

مثلث متساوی‌الاضلاع $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۶^۲ = \frac{۳۶\sqrt{۳}}{۴} = ۹\sqrt{۳}$

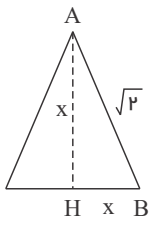
هرم $S = ۴ \times ۹\sqrt{۳} = ۳۶\sqrt{۳}$

۱۸ - گزینه ۳

از دوران شکل حول BC یک کره که در داخل آن دو مخروط که از قاعده به هم متصل هستند، کم شده است.



برای به دست آوردن حجم حاصل از قسمت هاشورخورده، حول BC کافیست حجم کره را منهای دو مخروط ایجاد شده کنیم.



باتوجه به رابطهٔ فیثاغورس:

$$AH^{۲} + BH^{۲} = (\sqrt{۲})^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} = ۲ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \rightarrow x = ۱$$

پس شعاع کره و شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع مخروط برابر ۱ است.

$$V_{\text{کره}} - V_{\text{دو مخروط}} = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} - ۲ \times \frac{۱}{۳} \times \pi r^{۲} h$$

$$= \frac{۴}{۳}\pi - \frac{۲}{۳}\pi = \frac{۲}{۳}\pi$$

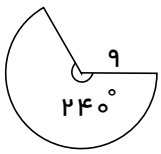
۱۹ - گزینه ۴

هر لیتر برابر ۱۰۰۰ سانتی مترمکعب می‌باشد.

۳ لیتر بر ثانیه $= ۳۰۰۰ \frac{cm^{۳}}{s}$

$$\frac{۳۰۰۰ \frac{cm^{\cancel{۳}}}{s}}{۲۵۰\ cm^{\cancel{۳}}} = \frac{۳۰۰۰}{۲۵۰}\frac{cm}{s} = ۱۲\frac{cm}{s}$$

۲۰ - گزینه ۲ محیط شکل داده شده با محیط قاعده‌ی مخروط برابر است.



محیط قسمتی از دایره $= \frac{۲۴۰}{۳۶۰}(۲\pi R) = \frac{۲۴۰}{۳۶۰}(۲\pi \times ۹)$

$$= \frac{۴ \times ۹ \times \pi}{۳} = ۱۲\pi$$

محیط قاعده مخروط $= ۲\pi R$

محیط قسمتی از دایره $= ۲\pi R = ۱۲\pi \Rightarrow R = ۶$

۲۱ - گزینه ۲ فرض کنید ابعاد مستطیل a، b، c هستند که ۳ برابر می‌شوند:

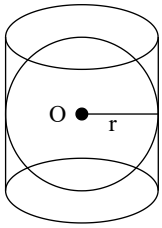
قطر : $\frac{\sqrt{(۳a)^{۲} + (۳b)^{۲} + (۳c)^{۲}}}{\sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}}} = \frac{\sqrt{۹a^{۲} + ۹b^{۲} + ۹c^{۲}}}{\sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}}} = \frac{\sqrt{۹(a^{۲} + b^{۲} + c^{۲})}}{\sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}}} = \frac{۳\cancel{\sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}}}}{\cancel{\sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}}}} = ۳$

مساحت جانبی : $\frac{۲ \times (۳a \times ۳b + ۳a \times ۳c)}{۲ \times (ab + ac)} = \frac{۹ab + ۹ac}{ab + ac} = \frac{۹\cancel{(ab + ac)}}{\cancel{ab + ac}} = ۹$

مساحت کل : $\frac{۲ \times (۳a \times ۳b + ۳a \times ۳c + ۳b \times ۳c)}{۲ \times (ab + ac + bc)} = \frac{۹ab + ۹ac + ۹bc}{ab + ac + bc} = \frac{۹\cancel{(ab + ac + bc)}}{\cancel{(ab + ac + bc)}} = ۹$

حجم : $\frac{۳a \times ۳b \times ۳c}{abc} = \frac{۲۷\cancel{abc}}{\cancel{abc}} = ۲۷$

۲۱ - گزینه ۲ هنگامی که کره‌ای درون استوانه‌ای محاط می‌شود شعاع قاعدهٔ استوانه و کره برابر است و ارتفاع استوانه برابر است با قطر کره.

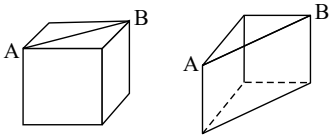


$R = r$ (شعاع استوانه) و $h = ۲r$ (ارتفاع استوانه)

$$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = ۳۶\pi \to r^{۳} = ۳۶ \times \frac{۳}{۴} = ۲۷ \to r = ۳$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^{۲} \times h = \pi \times ۳^{۲} \times ۶ = ۵۴\pi$$

۲۳ - گزینه ۳ شکل برش داده شده را رسم می‌کنیم:



این شکل، ۵ وجه دارد: دو وجه به شکل مثلث در بالا و پایین که هر کدام نصف مساحت وجه مکعب سابق را دارد و دو وجه مربع و یک وجه مستطیل، کافی است طول AB را به دست آوریم باتوجّه به رابطهٔ فیثاغورس.

$$AB^{۲} = ۵^{۲} + ۵^{۲} \Rightarrow AB^{۲} = ۵۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

مساحت مستطیل $= ۵\sqrt{۲} \times ۵ = ۲۵\sqrt{۲}$

مساحت دو وجه مربع $= ۲ \times ۵ \times ۵ = ۵۰$

مساحت دو وجه مثلث $=$ مساحت یک مربع $= ۵ \times ۵ = ۲۵$

$\Rightarrow$ مساحت کل $= ۲۵\sqrt{۲} + ۵۰ + ۲۵ = ۷۵ + ۲۵\sqrt{۲} = ۲۵(۳ + \sqrt{۲})$

۲۴ - گزینه ۲ شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ برابر $r + ۱۵$ و ارتفاع آن برابر $h + ۳۰$ است. حجم آن نیز ۴۳۲ است. بنابراین:

$$۴۳۲ = \pi R^{۲} h = \pi(r + ۱۵)^{۲} \times (h + ۳۰)$$

$$h + ۳۰ = \frac{۴۳۲}{\pi(r + ۱۵)^{۲}} \to h = \frac{۴۳۲}{\pi(r + ۱۵)^{۲}} - ۳۰$$

۲۵ - گزینه ۱ شکل حاصل یک نیم‌کره با شعاع ۳ می‌شود که باید یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۳ را از آن کسر کرد.

$$\text{حجم نیم‌کره} = \frac{۲}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۲}{۳}\pi \times ۳^{۳} = \frac{۲ \times \cancel{۲۷}^{۹}}{\cancel{۳}_{۱}}\pi = ۱۸\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲} h = \frac{۱}{\cancel{۳}_{۱}}\pi(۳)^{۲} \times \cancel{۳}^{۱} = ۹\pi$$

$$\to V_{\text{هاشور خورده}} = ۱۸\pi - ۹\pi = ۹\pi$$

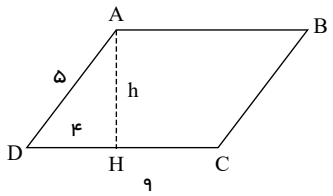
۲۶ - گزینه ۱ نکته: از دوران ربع دایره نیم‌کره حاصل می‌شود.

گر حول OB دوران بدهیم شکل حاصل یک نیم کره خواهد شد و حجم آن نصف حجم کره است.

$$\text{حجم نیم‌کره} = \frac{۱}{۲}\text{ حجم کره } = \frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}} \times \frac{\cancel{۴}^{۲}}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۲\pi r^{۳}}{۳}$$

$$\text{فرمول حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

۲۷ - گزینه ۲



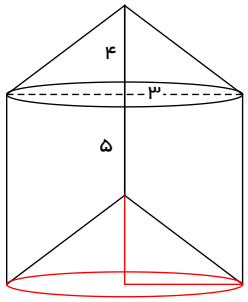
$$S = h \times ۹ = ۲۷$$

$$h = ۳$$

$$AH = ۳ \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} DH = ۴$$

مطابق شکل حجم جسم حاصل برابر است با حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۹. پس:

$$V = sh = \pi r^۲ h = \pi \times ۳^۲ \times ۹ = ۸۱\pi$$



۲۸ - گزینه ۲ قطر مکعب $= \sqrt{۳}\times$ ضلع مکعب

پس ضلع مکعب را برحسب a به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{۳}\times \text{ ضلع مکعب} = ۳a \rightarrow \text{ ضلع مکعب} = \frac{۳a}{\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}a}{۳} = \sqrt{۳}a$$

مساحت جانبی مکعب برابر است با:

$$۴ \times (\sqrt{۳}a)^۲ = ۴ \times ۳a^۲ = ۱۲a^۲$$

۲۹ - گزینه ۲ شکل حاصل دو استوانه هستند که روی هم قرار گرفته اند.

$$V_{\text{استوانه کوچک}} = \pi r^۲ \times h \xrightarrow{r=۳\ ,\ h=۲} V = ۳ \times ۳^۲ \times ۲ = ۵۴$$

$$V_{\text{استوانه بزرگ}} = \pi r'^۲ \times h' \xrightarrow{r'=۵\ ,\ h=۲} V' = ۳ \times ۵^۲ \times ۲ = ۱۵۰$$

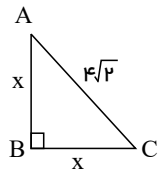
$$\rightarrow V + V' = ۱۵۰ + ۵۴ = ۲۰۴$$

۳۰ - گزینه ۳ ابتدا طبق قضیهٔ تالس نسبت شعاع‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \xrightarrow{h'=\frac{۱}{۲}h} \frac{r'}{r} = \frac{۱}{۲} \rightarrow r = ۲r'$$

$$\frac{V \text{ مخروط بزرگ}}{V \text{ مخروط کوچک}} = \frac{\frac{۱}{۳} \times r^۲\pi \times h}{\frac{۱}{۳} \times r'^۲\pi \times h'} = \frac{(۲r')^۲ \times ۲h'}{(r')^۲ \times h'} = \frac{۸r'h'}{r'h'} = ۸$$

۳۱ - گزینه ۱ ابتدا بنا بر قضیهٔ فیثاغورس برای مثلث ، اندازهٔ ضلع AB و BC را به دست می‌آوریم.

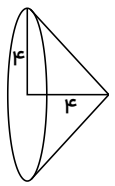


$$AB^۲ + BC^۲ = AC^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + x^۲ = (۴\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = ۳۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x = ۴$$

شکل حاصل از دوران حول یک ضلع قائم مخروطی به شعاع قاعده و ارتفاع ۴ است. پس:



$$\text{مخروط } V = \frac{۱}{۳}sh = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

$$= \frac{۱}{۳}\pi ۴^۲ \times ۴ = \frac{۶۴}{۳}\pi$$

۳۱ - گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

نسبت حجم به مساحت کل هر کدام از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینهٔ ۱:

$$\frac{\text{حجم مکعب}}{\text{مساحت کل مکعب}} = \frac{a^۳}{۶a^۲} = \frac{a}{۶}$$

گزینهٔ ۲:

$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{مساحت کل}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi a^۳}{۴\pi a^۲} = \frac{a}{۳}$$

گزینهٔ ۳:

$$\frac{\text{حجم استوانه}}{\text{مساحت کل استوانه}} = \frac{\pi a^۲ a}{۲\pi a \cdot a + ۲\pi a^۲} = \frac{\pi a^۳}{۲\pi a^۲ + ۲\pi a^۲} = \frac{\pi a^۳}{۴\pi a^۲} = \frac{a}{۴}$$

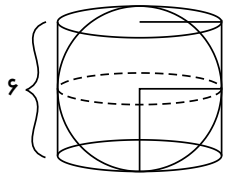
گزینهٔ ۴:

$$\frac{\text{حجم کره با شعاع } \frac{a}{۲}}{\text{مساحت کل با شعاع } \frac{a}{۲}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi(\frac{a}{۲})^۳}{۴\pi(\frac{a}{۲})^۲} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi\frac{a^۳}{۸}}{۴\pi\frac{a^۲}{۴}} = \frac{\frac{a^۳}{۶}}{a^۲} = \frac{a}{۶}$$

باتوجّه به اینکه $\frac{a}{۶} < \frac{a}{۴} < \frac{a}{۳}$ ، در نتیجه گزینهٔ ۲ درست است.

۳۳ - گزینه ۳

ابتدا باتوجه به راهبرد رسم شکل، شکل مناسبی رسم می‌کنیم.



باتوجه به شکل، کره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر در داخل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۶ قرار دارد، پس از حجم استوانه، حجم کره را کم می‌کنیم.

$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi r^۲ h - \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \pi(۳)^۲(۶) - \frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳ = ۵۴\pi - ۳۶\pi = ۱۸\pi$$

۳۴ - گزینه ۳ به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

* درجه عبارت $-۳ax^۳ + ۵a^۳ + ۵a^۳x^۲b + ۴a^۷$ نسبت به متغیر a برابر ۷ و نسبت به متغیر x برابر ۳ است، پس درجهٔ این عبارت نسبت به a و x برابر $۳ + ۷ = ۱۰$ است.

* عبارت $\frac{۶}{y} - y^۲$ گویا است، درست است.

* اگر $a > ۰$ و $b < ۰$ آنگاه $ab < ab^۲$، درست است. چون $ab^۲ > ۰$ و $ab < ۰$ است.

* اگر ارتفاع مخروطی را دو برابر کنیم، حجم آن نیز دو برابر می‌شود.

درست است.

$$\text{مخروط } v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \xrightarrow{\text{اگر } h \text{ دو برابر شود}} v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۲}{۳}\pi r^۲ h$$

پس ۳ تا از ۴ عبارت درست است.

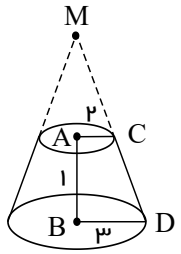
۳۵ - گزینه ۱ به سادگی و تجسم می‌تواند گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ را تشکیل داد.

۳۶ - گزینه ۱ ۲۵۲ درجه یعنی ۰٫۷ از محیط دایره پس محیط دایره را حساب کرده و در ۰٫۷ ضرب می‌کنیم:

$$\text{محیط} = \text{قطر} \times \pi \rightarrow \text{محیط مکانی} = ۲۰ \times \pi \times ۰٫۷ = ۱۴\pi$$

محاسبه‌ی شعاع قاعده‌ی مخروط : $۱۴\pi = x\pi \rightarrow x = ۱۴ \rightarrow \text{شعاع} = ۷$

۳۷ - گزینه ۳ حجم حاصل، مخروط ناقص می‌باشد، یعنی یک مخروط بزرگ که مخروط کوچکی از آن کم شده است.



$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{x}{x+۱} = \frac{۲}{۳} \rightarrow ۳x = ۲(x+۱) \rightarrow ۳x = ۲x + ۲$$

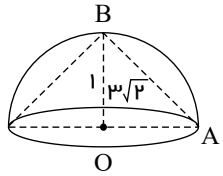
$$\rightarrow ۳x - ۲x = ۲ \rightarrow x = ۲$$

$$V = \frac{\pi r^۲ h}{۳} \begin{cases} \xrightarrow{\text{مخروط بزرگ}} V_۱ = \frac{\pi \times ۳^۲ \times ۳}{۳} = ۹\pi \\ \xrightarrow{\text{مخروط کوچک}} V_۲ = \frac{\pi \times ۲^۲ \times ۲}{۳} = \frac{۸\pi}{۳} \end{cases}$$

$$V_{\text{شکل}} = V_۱ - V_۲ = ۹\pi - \frac{۸\pi}{۳} = \frac{۲۷\pi - ۸\pi}{۳} = \frac{۱۹\pi}{۳}$$

۳۸ - گزینه ۱ اگر شکل را دوران دهیم به یک نیم‌کره می رسیم که شعاع آن طبق فیثاغورس برابر ۳ است.

$$OB = OA \to (OB)^۲ + (OA)^۲ = (AB)^۲ \to ۲(OA)^۲ = (۳\sqrt{۲})^۲ \to OA = ۳$$



$$\text{حجم نیم‌کره} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^۳}{۲} = \frac{\frac{۴}{۳} \times \pi \times ۳ \times ۳ \times ۳}{۲} = ۱۸\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{\pi \times ۳ \times ۳ \times ۳}{۳} = ۹\pi$$

$$\text{حجم رنگی} = \text{حجم نیم‌کره} - \text{حجم مخروط} = ۱۸\pi - ۹\pi = ۹\pi$$

۳۹ - گزینه ۱ باتوجه به شکل ۲ تا طول جعبه، ۲ تا عرض و ۴ تا ارتفاع داریم یعنی:

$$۲(۲۰) + ۲(۱۵) + ۴(۱۰) = ۱۱۰$$

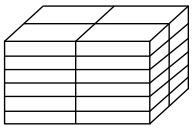
$$\text{طول کل روبان} = ۱۱۰ + ۴۷ = ۱۵۷cm$$

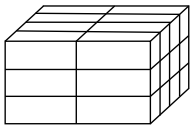
۴۰ - گزینه ۱

دو روش برای چیدن جعبه‌ها وجود دارد:

۱) ۶ طبقه در هر طبقه ۴ جعبه ۲) ۶ طبقه و در هر طبقه ۸ جعبه

هم روش دیگر این است که حجم جعبه‌ی A بر حجم جعبه‌ی B تقسیم شود.





$$\begin{matrix} A_{\text{حجم}} V_A = ۱۰ \times ۴ \times ۶ = ۲۴۰\ cm^۳ \\ B_{\text{حجم}} V_B = ۵ \times ۲ \times ۱ = ۱۰\ cm^۳ \end{matrix} \to \frac{A_{\text{حجم}}}{B_{\text{حجم}}} = \frac{۲۴۰}{۱۰} = ۲۴ \text{ عدد}$$

۴۱ - گزینه ۳ زیرا در این گزینه یک طرف قاعده ندارد.

۴۲ - گزینه ۱ مساحت بیرونی هر وجه مکعب برابر است با: $۹ = ۳ \times ۳$ اما یک مربع ۱×۱ از آن کم می‌شود $۹ - ۱ = ۸cm^۲$ پس مساحت ۶ وجه مکعب برابر است با: $۶ \times ۸ = ۴۸m^۲$

از هر وجه یک سوراخ مربع شکل ایجاد شده و دور تا دور این سوراخ ۴ مربع ۱×۱ وجود دارد.

$$۴ \times ۶ \times ۱ \times ۱ = ۲۴$$

$$\text{مساحت کل} = ۴۸ + ۲۴ = ۷۲$$

۴۳ - گزینه ۲

$$\text{حجم} = x^۲ \times ۱۰ = ۶۴۰ \to x^۲ = ۶۴ \Rightarrow x = ۸cm$$

$$\text{مساحت کل} = ۲x^۲ + ۴(۱۰x) = ۱۲۸ + ۳۲۰ = ۴۴۸cm^۲$$

$$\text{هزینه‌ی رنگ آمیزی یک مکعب} = ۴۴۸ \times ۱۵ = ۶۷۲۰$$

۴۴ - گزینه ۳ مکعب‌هایی که در گوشه قرار می‌گیرند هر سه وجه‌شان و مکعب‌های روی یال دو وجه آن‌ها قابل دیدن است. ۴ تا از مکعب‌های وسط هر وجه، فقط یک وجه قابل دیدن دارند. بنابراین ۸ تا از مکعب‌های سیاه را در وسط مکعب قرار می‌دهیم که هیچ وجهی از آن‌ها دیده نشود. در هر وجه ۴ مکعب وسط را سیاه قرار می‌دهیم $۸ + ۴ \times ۶ = ۳۲$ یک مکعب سیاه می‌ماند که آن را روی یال می‌گذاریم که دو وجه آن دیده می‌شود

$$\text{تعداد سطوح سیاه بیرونی} : (۴ \times ۶) + (۲ \times ۱) = ۲۶$$

۴۵ - گزینه ۴ اگر طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیل را با a و b و c نشان دهیم:

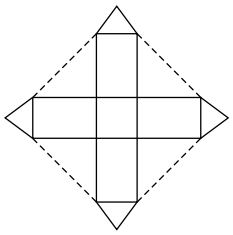
$$۴(a + b + c) = ۶۸ \Rightarrow a + b + c = ۱۷$$

$$ab = ۱۸ \Rightarrow a = ۲,\ b = ۹$$
$$\text{یا} a = ۳,\ b = ۶$$

مقدار $a = ۱۸$ و $b = ۱$ قابل قبول نیست چون جمع $a + b + c$ از ۱۷ بزرگتر می‌شود. طبق مقادیر a و b مقدار c می‌تواند ۶ و یا ۸ باشد.

$$\text{حجم‌های ممکن} : \begin{matrix} ۲ \times ۹ \times ۶ = ۱۰۸ \\ ۳ \times ۶ \times ۸ = ۱۴۴ \end{matrix}$$

۴۶ - گزینه ۳



الگوی مکعب را به شکل مقابل در نظر بگیرید. به این ترتیب، مربعی به ضلع $\frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} + \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$ برای ساختن مکعب کافی است.

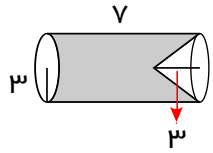
کوچکترین عدد طبیعی کمتر از $۴\sqrt{۲}$ برابر است با ۶ .

۴۷ - گزینه ۱ توجه کنید که مثلث $A_۱DC_۱$ متساوی‌الاضلاع است.

۴۸ - گزینه ۴ ابعاد آن مکعب باید کوچکترین مضرب مشترک اعداد ۱ و۲ و ۳ باشد. بنابراین طول این مکعب ۶ و حجم آن ۲۱۶ است. از طرف دیگر حجم مکعب مستطیل $۱ \times ۲ \times ۳ = ۶$ می‌باشد بنابراین تعداد مکعب مستطیل‌های لازم برابر است با: $۲۱۶ \div ۶ = ۳۶$

۴۹ - گزینه ۱ هر مکعب ۶ وجه و هر چهار وجهی ۴ وجه دارد. این حجم‌ها روی هم $۵ \times ۶ + ۳ \times ۴ = ۴۲$ وجه دارند.

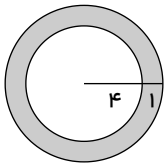
۵۰ - گزینه ۳ شکل حاصل یک استوانه به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۷ است که یک مخروط به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۳ از آن کم شده است.



$$\left.\begin{aligned} V_{\text{استوانه}} &= \pi R^۲ h = \pi \times ۳^۲ \times ۷ = ۶۳\pi \\ V_{\text{مخروط}} &= \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi \times ۳^۲ \times ۳ = ۹\pi \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = ۶۳\pi - ۹\pi = ۵۴\pi$$

۵۱ - گزینه ۴ قسمت‌هایی که باید رنگ شوند، شامل سطح یک نیم‌کره بیرونی به شعاع ۵ سانتی‌متر، سطح یک نیم‌کره داخلی با شعاع ۴ سانتی‌متر و ضخامت ظرف که شکلی مانند شکل روبرو دارد:



مساحت نیم‌کره‌ی بیرونی $= ۲\pi R^۲ = ۲ \times ۳ \times ۵^۲ = ۱۵۰cm^۲$

مساحت نیم‌کره‌ی داخلی $= ۲\pi R'^۲ = ۲ \times ۳ \times ۴^۲ = ۹۶cm^۲$

مساحت شکل بالایی $= (\pi \times ۵)^۲ - (\pi \times ۴^۲) = ۲۵\pi - ۱۶\pi = ۹\pi = ۹ \times ۳ = ۲۷cm^۲$

کل مساحت رنگ شده $= ۱۵۰ + ۹۶ + ۲۷ = ۲۷۳cm^۲ = ۰/۰۲۷۳m^۲$

میزان رنگ مصرفی $= ۱۰۰ \times ۰/۰۲۷۳ = ۲/۷۳$ گرم

که در بین گزینه‌ها موجود نیست.

۵۲ - گزینه ۴ شکل جدید از ۲ وجه مربع به ضلع $۳b$، یک وجه مستطیل شکل به طول AB و عرض $۳b$ و همچنین دو مثلث قائم‌الزاویه به ضلع‌های قائمه $۳b$ تشکیل می‌شود. ابتدا طول AB را به دست می‌آوریم:

$$(AB)^۲ = (۳b)^۲ + (۳b)^۲ = ۹b^۲ + ۹b^۲ = ۱۸b^۲ \rightarrow AB = \sqrt{۱۸}b$$

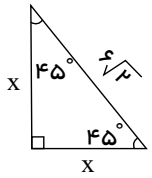
مساحت وجه مستطیل $= ۳\sqrt{۲}b \times ۳b = ۹\sqrt{۲}b^۲$

مساحت‌های دو وجه مربعی $= ۲ \times ۳b \times ۳b = ۱۸b^۲$

مساحت‌های دو وجه مثلثی $= ۲ \times \frac{۳b \times ۳b}{۲} = ۹b^۲$

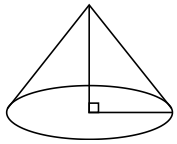
مساحت کل شکل $= ۹\sqrt{۲}b^۲ + ۱۸b^۲ + ۹b^۲ = ۹\sqrt{۲}b^۲ + ۲۷b^۲ = b^۲(۹\sqrt{۲} + ۲۷)$

۵۳ - گزینه ۲ در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین دو ساق برابرند و دو زاویه ۴۵ درجه هم دارد.



$$(\text{ضلع})^۲ + (\text{ضلع})^۲ = (\text{وتر})^۲ \rightarrow x^۲ + x^۲ = \underbrace{(۶\sqrt{۲})^۲}_{۳۶\times۲=۷۲}$$

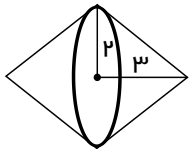
$\rightarrow ۲x^۲ = ۷۲ \rightarrow x^۲ = ۳۶ \rightarrow x = \sqrt{۳۶} = ۶$



حجم مخروط $= \frac{۱}{۳}$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع $= \frac{۱}{۳}\pi \times (۶)^۲ \times ۶$

$= \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۲۱۶ = \frac{۲۱۶\pi}{۳} = ۷۲\pi$

۵۴ - گزینه ۱ دو مخروط یکسان با شعاع قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۳ تشکیل می‌شود.



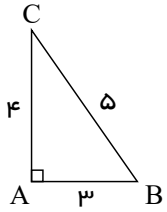
$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{\pi \times ۲ \times ۲ \times ۳}{۳} = ۴\pi$

$\rightarrow$ هر دو مخروط $V = ۲ \times ۴\pi = ۸\pi$

۵۵ - گزینه ۱

$AB^۲ = ۵^۲ - ۴^۲ \rightarrow AB^۲ = ۲۵ - ۶ = ۹ \rightarrow AB = \sqrt{۹} = ۳$

دوران حول ضلع AB یعنی ارتفاع $۳cm$ و شعاع $۴cm$ می‌باشد.



حجم $= \frac{۱}{۳}$ **مساحت قاعده** $\times$ **ارتفاع**

$V_۱ = \frac{۱}{۳} \times (\pi \times ۴^۲) \times ۳ = \frac{۱}{۳}\pi \times ۱۶ \times ۳ = ۱۶\pi$

دوران حول ضلع AC یعنی ارتفاع $۴cm$ و شعاع $۳cm$ می‌باشد.

$V_۲ = \frac{۱}{۳} \times (\pi \times ۳^۲) \times ۴ = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۹ \times ۴ = \frac{۳۶\pi}{۳} = ۱۲\pi$

$V_۱ - V_۲ = ۱۶\pi - ۱۲\pi = ۴\pi$

۵۶ - گزینه ۱

$(AC)^۲ = (AB)^۲ + (BC)^۲ \xrightarrow{AB=BC} (AC)^۲ = ۲(AB)^۲$

$\rightarrow (۳\sqrt{۲})^۲ = ۲(AB)^۲ \rightarrow ۹ \times \cancel{۲} = \cancel{۲}(AB)^۲ \rightarrow AB = \sqrt{۹} = ۳$

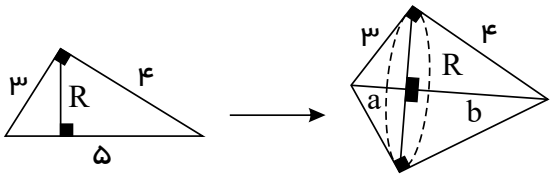
$AB = BC = ۳cm$

از دوران حول AB نیز مخروط به شعاع و قاعده‌ی ۳ به وجود می‌آید.

$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{\pi \times ۳ \times ۳ \times ۳}{۳} = ۹\pi$

۵۷ - گزینه ۲ مثلث گفته شده قائم‌الزاویه است، چرا که $۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$. حال این مثلث را حول وتر دوران می‌دهیم. دو مخروط قائم به شعاع R و ارتفاع‌های a و b تشکیل می‌شود.

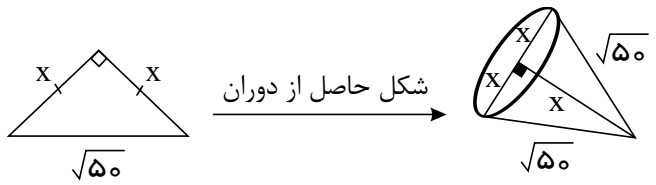
مثلث $S = \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۶ = \frac{R \times ۵}{۲} \rightarrow R = \frac{۱۲}{۵}$



$\left.\begin{array}{l} V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ a \text{ مخروط سمت چپ} \\ V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ b \text{ مخروط سمت راست} \end{array}\right\} \rightarrow V_{\text{کل}} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ a + \frac{۱}{۳}\pi R^۲ b$

$= \frac{۱}{۳}\pi R^۲ \overbrace{(a+b)}^{۵} = \frac{۵}{۳}\pi R^۲ = \frac{۵}{۳}\pi (\frac{۱۲}{۵})^۲ = \frac{\cancel{۵}^{۱}}{\cancel{۳}_{۱}}\pi \times \frac{\cancel{۱۴۴}^{۴۸}}{\cancel{۲۵}_{۵}} = \frac{۴۸\pi}{۵}$

۵۸ - گزینه ۱

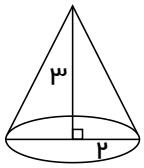


$\rightarrow x^{۲} + x^{۲} = (\sqrt{۵۰})^{۲} \Rightarrow ۲x^{۲} = ۵۰ \rightarrow x^{۲} = ۲۵ \rightarrow x = ۵cm$

در نتیجه شعاع قاعده‌ی مخروط و ارتفاع مخروط برابر ۵ سانتی‌متر است. پس حجم مخروط برابر است با:

$\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h = \frac{۱}{۳}\pi(۵)^{۲} \times ۵ = \frac{۱۲۵}{۳}\pi$

۵۹ - گزینه ۱ چون صفحه‌ی کاغذ به اندازه‌ی ۱۸۰° دوران یافته است، بنابراین حجم به دست آمده، نصف حجم مخروط است.



شکل $V = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h = \frac{۱}{۶} \times \pi \times (۲)^{۲} \times ۳ = \frac{۱۲}{۶}\pi = ۲\pi cm^{۳}$

۶۰ - گزینه ۳

کره $V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$

نیم‌کره $V = (\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}) \times \frac{۱}{۲} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi \times ۲ \times ۲ \times ۲}{۲} = \frac{۱۶\pi}{۳}$