پاسخ‌نامه تشریحی

۱ (۴) (۳) (۲) (۱) هر سؤال ۳ حالت دارد و ۵ سؤال داریم، پس طبق اصل ضرب:

$\underline{۳} \times \underline{۳} \times \underline{۳} \times \underline{۳} \times \underline{۳} = ۳^{۵} = ۲۴۳$

۲۴۳ حالت مختلف برای پاسخ این نظرسنجی وجود دارد T اما دقت کنید فقط ۲۰۰ نفر در این نظرسنجی شرکت کرده‌اند؛ پس حداکثر ۲۰۰ حالت مختلف از این ۲۴۳ حالت قابل به‌وجود آمدن است.

۲ (۴) (۳) (۲) (۱) چون عدد باید فرد باشد در خانه‌ی یکان یا ۵ یا ۷ قرار می‌گیرد، پس دو حالت داریم. در خانه‌ی اول سمت چپ چون عدد باید از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد باید ۴ یا بیش‌تر از ۴ باشد که یکی از ارقام ۵ و ۷ را قبلاً انتخاب کردیم، پس ۳ حالت داریم یا ۸ یا ۴ یا یکی از ۵ و ۷ (۲ و صفر نمی‌تواند در خانه‌ی اول باشد.)

برای خانه‌ی دوم از سمت چپ، چون از ۶ تا رقم دو رقم استفاده شده، پس ۴ حالت داریم و برای خانه‌ی سوم از سمت چپ به همین ترتیب ۳ رقم باقی می‌ماند.

$\boxed{۳}\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۲} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$

۳ (۴) (۳) (۲) (۱) برای این‌که عدد، کوچک‌تر از ۸۷۴ باشد:

I) در صورتی‌که، رقم سمت چپ آن یکی از اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ باشند، عدد، کوچک‌تر از ۸۷۴ خواهد شد و برای دو رقم دیگر محدودیتی وجود ندارد و می‌توانند هر یک از ارقام ۰ تا ۹ را داشته باشند اما چون تکرار مجاز نیست، هر رقم یک حالت از رقم قبلی کم‌تر دارد و طبق اصل ضرب داریم:

$\underline{۷}, \underline{۹}, \underline{۸} = ۷ \times ۹ \times ۸ = ۵۰۴$ حالت

II) در صورتی‌که، رقم سمت چپ ۸ باشد، برای این‌که عدد ما کوچک‌تر از ۸۷۴ باشد اگر رقم وسط یکی از ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ باشد؛ برای رقم سوم محدودیتی نداریم و می‌تواند هر یک از ارقام ۰ تا ۹ داشته باشد.

باتوجه به اصل ضرب و این‌که تکرار مجاز نیست داریم:

$\underline{۱}, \underline{۷}, \underline{۸} = ۵۶$ حالت

III) در صورتی‌که رقم سمت چپ ۸ و رقم وسط ۷ باشد، برای این‌که عدد ما کوچک‌تر از ۸۷۴ باشد رقم سمت راست باید یکی از ارقام ۰, ۱, ۲, ۳ باشد که طبق اصل ضرب ۴ حالت دارد:

$\underline{۱}, \underline{۱}, \underline{۴} = ۴$

طبق اصل جمع، در کل برای این‌که عدد ۳ رقمی (بدون تکرار ارقام) ما از ۸۷۴ کوچک‌تر باشد $۵۶۴ = ۵۰۴ + ۵۶ + ۴$ حالت دارد.

۴ (۴) (۳) (۲) (۱) کلیه‌ی اعداد ۳ رقمی زوج با ارقام غیر تکراری که یکان صفر باشد، برابر است با:

$\boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \boxed{۱} = ۲۰$

صفر قرار دارد.

کلیه‌ی اعداد ۳ رقمی زوج با ارقام غیر تکراری که یکان دو باشد برابر است با: (رقم صدگان صفر نمی‌تواند باشد.)

$\boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \boxed{۱} = ۱۶$

بنابراین $۳۶ = ۱۶ + ۲۰$ عدد وجود دارد.

۵ (۴) (۳) (۲) (۱) برای رفتن از A به D طبق اصل ضرب $۳۰ = ۵ \times ۳ \times ۲$ حالت وجود دارد. برای برگشت هم ۲۹ حالت وجود دارد (چرا که مسیر رفته قابل برگشت نیست) و در کل طبق اصل ضرب برای رفت و برگشت $۸۷۰ = ۲۹ \times ۳۰$ حالت داریم.

۶ (۴) (۳) (۲) (۱) از خانه سمت چپ شروع می‌کنیم:

اولین خانه به ۶ حالت می‌تواند پر شود $\underline{۶}, _, _, _, _, _, _, _$

دومین خانه به ۵ حالت می‌تواند پر شود چرا که نباید با خانه‌ی قبلی یکسان باشد $\underline{۶}, \underline{۵}, _, _, _, _, _, _$

سومین خانه هم به ۵ حالت (۶ حرف منهای آن حرفی که در خانه‌ی دوم نشسته)

به‌همین ترتیب و طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

تعداد حالات $= ۶ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۶ \times ۵^{۸}$

۷ (۴) (۳) (۲) (۱) فرض کنیم رقم اول و سوم دو باشند: $\underline{۱} \times \underline{۹} \times \underline{۱} \times \underline{۹} = ۸۱$

باقی ارقام از صفر تا نه به جز ۲ می‌توانند باشند و ۹ حالت دارند و طبق اصل ضرب ۸۱ حالت داریم.

فرض کنیم رقم دوم و چهارم دو باشند: $\underline{۸} \times \underline{۱} \times \underline{۹} \times \underline{۱} = ۷۲$

رقم اول از یک تا نه به جز ۲ می‌تواند باشد که ۸ حالت دارد.

رقم سوم هم از صفر تا نه به جز ۲ می‌تواند باشد که ۹ حالت دارد.

و طبق اصل ضرب ۷۲ حالت داریم.

طبق اصل جمع، در مجموع $۱۵۳ = ۸۱ + ۷۲$ حالت داریم.

۸ ۴ ۳ **۲** ۱ هر مسافر در ۳ ایستگاه می‌تواند پیاده شود، پس طبق اصل ضرب داریم: $۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۸$

۹ **۴** ۳ ۲ ۱ برای این‌که از راست به چپ یا چپ به راست خواندن یک کلمه، با هم فرقی نداشته باشد، باید حروف اول و آخر با هم و همچنین دو حرف وسط با هم یکسان باشند.

برای حرف اول، بدون محدودیت یکی از ۲۶ حرف انگلیسی را انتخاب می‌کنیم که ۲۶ حالت دارد. حرف اول هرچه که انتخاب شد، حرف آخر هم باید همان باشد، پس حرف آخر ۱ حالت دارد.

حرف دوم هم محدودیتی ندارد پس به ۲۶ طریق انتخاب می‌شود و حرف سوم هم ۱ حالت دارد، چون باید با حرف دوم یکسان باشد.

پس طبق اصل ضرب داریم:

$$۲۶ \times ۲۶ \times ۱ \times ۱ = ۲۶^۲$$

۱۰ ۴ ۳ **۲** ۱

چون عدد سه رقمی فرد با ارقام متمایز است، یکان از بین اعداد $\{۱, ۳, ۵, ۹\}$ انتخاب می‌شود. باتوجه به این که یکی از اعداد برای یکان استفاده شده است و صدگان نمی‌تواند صفر باشد بنابراین صدگان ۵ حالت دارد، دهگان نیز باتوجه به انتخاب شدن دو عدد، ۵ حالت خواهد داشت، پس:

$$\underset{\text{صدگان}}{\boxed{۵}} \times \underset{\text{دهگان}}{\boxed{۵}} \times \underset{\text{یکان}}{\boxed{۴}} = ۱۰۰$$

۱۱ ۴ ۳ **۲** ۱ تمامی اعداد ۳ رقمی مضرب ۵ که یکان آن صفر می‌باشد:

$$\overset{\text{صدگان}}{\boxed{۹}} \quad \overset{\text{دهگان}}{\boxed{۱۰}} \quad \overset{\text{یکان}}{\boxed{۱}} = ۹ \times ۱۰ \times ۱ = ۹۰$$

تمامی اعداد ۳ رقمی مضرب ۵ که یکان آن‌ها رقم ۵ می‌باشد:

$$\overset{\text{صدگان}}{\boxed{۹}} \quad \overset{\text{دهگان}}{\boxed{۱۰}} \quad \overset{\text{یکان}}{\boxed{۱}} = ۹ \times ۱۰ \times ۱ = ۹۰$$

کلیه‌ی اعداد ۳ رقمی مضرب ۵ $= ۹۰ + ۹۰ = ۱۸۰$

در جایگاه صدگان، صفر قرار نمی‌گیرد.

۱۲ ۴ ۳ **۲** ۱

> مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد $a^n \times b^m \times \cdots$ که در آنها a, b اعداد اول و m, n اعداد صحیح است.
> به شکل ۰ تا n ضرب در ۰ تا m و ... است و تعداد آن برابر با $(m+۱) \times (n+۱) \times \cdots$ است.

هر مقسوم‌علیه طبیعی این عدد به شکل $۲^x \times ۳^y \times ۵^z$ است که در آن‌ها x از صفر تا ۲ و y از صفر تا ۳ و z از صفر تا ۵ می‌تواند باشد پس طبق اصل ضرب تعداد کل مقسوم‌های طبیعی این عدد برابر است با $۳ \times ۴ \times ۶ = ۷۲$

۱۳ ۴ **۳** ۲ ۱ ارقام ۱ تا ۹ را در نظر می‌گیریم.

$$\underbrace{\boxed{۹}\boxed{۹}\boxed{۹}}_{\text{اعداد}} \quad \underbrace{\boxed{۵}}_{\text{حرف}} \Rightarrow ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۵ = ۳۶۴۵$$

۱۴ ۴ ۳ **۲** ۱ رقم صدگان باید یکی از سه رقم ۳، ۵ و ۶ باشد. رقم دهگان و یکان هر یک از پنج رقم داده شده می‌تواند باشد.

$$\underline{۳} \times \underline{۵} \times \underline{۵} = ۷۵$$

۱۵ ۴ ۳ **۲** ۱ عدد بزرگ‌تر از ۳۰۰ خواهد بود:

اگر صدگان، ۴ یا ۵ باشد:

$$\frac{۲}{۴}, \frac{۵}{}, \frac{۴}{} = ۲ \times ۵ \times ۴ = ۴۰$$
$$۵$$

اگر صدگان ۳ و دهگان بزرگ‌تر از صفر باشد:

$$\frac{۱}{۳}, \frac{۴}{}, \frac{۴}{} = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

اگر صدگان ۳ و دهگان صفر و یکان بزرگ‌تر از صفر باشد:

$$\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۰}, \frac{۴}{} = ۴$$

طبق اصل جمع کل حالت‌هایی که داریم برابر است با:

$$۴۰ + ۱۶ + ۴ = ۶۰$$

روش دوم:

روش بالا وقتی که اعداد تکرار ارقام دارند، کاربرد زیادی دارد ولی چون در این سوال ارقام تکرار ندارند نیازی به حالت‌بندی نمی‌باشد.

برای این که عدد بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، تنها کافی است که صدگان ۳ یا ۴ یا ۵ باشد.

$$\frac{۳}{۳ \text{ یا } ۴ \text{ یا } ۵}, \frac{۵}{}, \frac{۴}{} = ۳ \times ۵ \times ۴ = ۶۰$$

۱۶ ۴ **۳** ۲ ۱ حداقل صندلی‌ها بنابر اصل ضرب برابر است با: $۵ \times ۳ \times ۴ \times ۲۰ = ۱۲۰۰$

حداکثر صندلی‌ها بنابر اصل ضرب برابر است با: $۵ \times ۵ \times ۶ \times ۳۰ = ۴۵۰۰$

تفاضل حداقل و حداکثر برابر است با: $۴۵۰۰ - ۱۲۰۰ = ۳۳۰۰$

۱۷ ۱ ۲ ۳ **۴** چهار خانه را در نظر می‌گیریم. کلمه‌ی ملکان پنج حرفی است. بنابراین خانه‌های سمت راست و چپ با حروف «م» و «ل» و هر کدام به یک طریق پُر می‌شود و چون تکرار مجاز نمی‌باشد، دو خانه‌ی دیگر به ۲ و ۳ طریق تکمیل می‌گردد.

$$\overset{ل}{\boxed{۱}}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \overset{م}{\boxed{۱}} \longrightarrow ۱ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

۱۸ **۱** ۲ ۳ ۴ به جهت فلش ها دقت کنید:

برای رفتن از A به C یا به‌طور مستقیم به C می‌رویم و یا ابتدا به B رفته و سپس از B به C می‌رویم:

$A \xrightarrow{\text{مستقیم}} C \ : \ ۲$

$A \to B \ : \ ۳$

$B \to C \ : \ ۲$

$A \to B \to C \ : \ ۳ \times ۲ = ۶$

$A \xrightarrow{\text{در کل}} C = ۲ + ۶ = ۸$

برای برگشت از C به A یا به‌طور مستقیم به A برمی‌گردیم و یا ابتدا به B برگشته و سپس از B به A برمی‌گردیم:

$C \xrightarrow{\text{مستقیم}} A \ : \ ۲$

$C \to B \ : \ ۲$

$B \to A \ : \ ۲$

$C \to B \to A \ : \ ۲ \times ۲ = ۴$

$C \xrightarrow{\text{در کل}} A = ۲ + ۴ = ۶$

برای رفت و برگشت از A به C، طبق اصل ضرب داریم:

$۶ \times ۸ = \underline{۴۸}$

۱۹ **۱** ۲ ۳ ۴ تعداد حالات را در دو حالت زیر می‌شماریم:

I: اگر رأس‌های A و C همرنگ باشند (این کار به ۳ حالت قابل انجام است.) در این صورت برای هریک از رأس‌های B و D، ۲ حالت داریم:

$۳ \times ۱ \times ۲ \times ۲ = ۱۲$

$A \quad C \quad B \quad D$

II: اگر رأس‌های A و C همرنگ نباشند (این کار به ۳×۲ حالت قابل انجام است.) در این صورت خود به خود رنگ رأس‌های B و D (که حتماً همرنگ هستند) مشخص می‌شود:

$۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶$

$A \quad C \quad B \quad D$

بنابراین تعداد کل حالات برابر $۱۲ + ۶ = ۱۸$ می‌باشد.

۲۰ ۱ ۲ **۳** ۴ رقم اول هر یک از ارقام ۱ تا ۹ می‌تواند باشد: ۹ حالت

رقم دوم هر یک از ارقام ۰ تا ۹ می‌تواند باشد: ۱۰ حالت

رقم سوم تفاضل ارقام اول و دوم است پس یک حالت بیش‌تر ندارد: ۱ حالت

رقم چهارم و پنجم هم هر یک ۱۰ حالت دارند: ۱۰ حالت

طبق اصل ضرب داریم: $\underline{۹}, \underline{۱۰}, \underline{۱}, \underline{۱۰}, \underline{۱۰} = ۹ \times ۱۰^{۳}$

۲۱ **۱** ۲ ۳ ۴ هر یک از مؤلفه‌های اول که ۵ تا هستند؛ می‌توانند یکی از سه مؤلفه‌ی دوم موجود را انتخاب کنند و چون مؤلفه‌های اول هم متفاوت هستند؛ پس در تابع بودن رابطه مشکلی پیش نمی‌آید.

اصل ضرب: $\underline{۳}, \underline{۳}, \underline{۳}, \underline{۳}, \underline{۳} = ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^{۵}$

۲۲ ۱ ۲ **۳** ۴ نفر اول یک نفر از ۱۳ نفر است که ۱۳ حالت دارد.

نفر دوم، یک نفر از ۱۲ نفر باقیمانده است که خود ۱۲ حالت دارد.

نفر سوم، یک نفر از ۱۱ نفر باقیمانده است که خود ۱۱ حالت دارد.

طبق اصل ضرب، نفرات اول تا سوم به $۱۳ \times ۱۲ \times ۱۱$ حالت ممکن است مشخص شوند.

۲۳ ۱ ۲ ۳ **۴** برای رنگ‌آمیزی آجر اول (فرض کنید آجر سمت چپ بالا) ۳ انتخاب داریم و برای آجر کناری آن ۲ انتخاب موجود است. از آن‌جا که رنگ آجرهای مجاور باید متفاوت باشد، با مشخص شدن رنگ دو آجر کنار هم اول، رنگ بقیهٔ آجرها خودبه‌خود مشخص می‌شود، پس تعداد حالات برابر است با:

$$\underset{\text{آجر اول}}{۳} \times \underset{\text{آجر دوم}}{۲} \times \underbrace{۱ \times ۱ \times \cdots \times ۱}_{\text{۱۴ آجر دیگر}} = ۶$$

۲۴ ۱ **۲** ۳ ۴ هر عضو ۲ حالت دارد، یا در زیرمجموعه هست یا نیست، ۳ و ۱ که تکلیفشان مشخص است و ۱ حالت دارند.

پس برای باقی اعضا طبق اصل ضرب $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۱۶$ حالت داریم.

۲۵ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا تعداد کل توابعی که می‌توان از A به B نوشت را می‌یابیم. (ح: حالت)

$f = \{(a, \text{ح}\,۴), (b, \text{ح}\,۴), (c, \text{ح}\,۴), (d, \text{ح}\,۴)\}$

پس تعداد کل توابع برابر $۴^۴ = ۲^۸ = ۲۵۶$ است.

تعداد توابعی را نیز که تعداد اعضای دامنه وبرد برابر دارند، می‌یابیم:

$f = \{a, \text{ح}\,۴), (b, \text{ح}\,۳), (c, \text{ح}\,۲), (d, \text{ح}\,۱)\} \Rightarrow$ تعداد توابع مطلوب $= ۴! = ۲۴$

$\Rightarrow$ جواب نهایی $= ۲۵۶ - ۲۴ = ۲۳۲$

۲۶ **۴** ۳ ۲ ۱ در کد هم تکرار رقم داریم و هم صفر می‌تواند به‌عنوان رقم اول سمت چپ به‌کار گرفته شود. بنابراین ابتدا تعداد کل کدها را محاسبه کرده و سپس تعداد حالت‌هایی که فاقد صفر باشد را از آن کم می‌کنیم.

$$\underbrace{۶ \times ۶ \times ۶}_{\text{کل کدها}} - \underbrace{۵ \times ۵ \times ۵}_{\text{فاقد رقم صفر}} = ۲۱۶ - ۱۲۵ = ۹۱$$

۲۷ ۴ ۳ **۲** ۱

تعداد مربع‌های $۱ \times ۱ = ۵ \times ۶ = ۳۰$

تعداد مربع‌های $۲ \times ۲ = ۴ \times ۵ = ۲۰$

تعداد مربع‌های $۳ \times ۳ = ۳ \times ۴ = ۱۲$

تعداد مربع‌های $۴ \times ۴ = ۲ \times ۳ = ۶$

تعداد مربع‌های $۵ \times ۵ = ۱ \times ۲ = ۲$

بنابراین تعداد کل مربع‌ها برابر است با: $۳۰ + ۲۰ + ۱۲ + ۶ + ۲ = ۷۰$

۲۸ ۴ ۳ **۲** ۱ هر یک از ۵ رقم به‌جز رقم اول می‌توانند ارقام ۰ تا ۹ را داشته باشند. اگر ارقام ۲ و ۳ در آن‌ها نباشند، هر رقم می‌تواند یکی از ارقام $۰, ۱, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹$ باشد.

به‌جز رقم اول که نمی‌تواند صفر باشد.

پس طبق اصل ضرب: $\underline{۷}, \underline{۸}, \underline{۸}, \underline{۸}, \underline{۸} = ۷ \times ۸^۴$

۲۹ ۴ ۳ ۲ **۱** چون عدد فرد است پس رقم آخر باید ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ باشد که ۴ حالت دارد و باقی اعداد از بین ۶ عدد باقی‌مانده انتخاب می‌شوند و چون تکرار مجاز نیست هر رقم ۱ حالت از رقم پیشین کم‌تر خواهد داشت.

۶	۵	۴	۳	۴
				۱
				۳
				۵
				۷

طبق اصل ضرب $۴ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶$ حالت دارد.

$۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۴ = ۱۴۴۰$

۳۰ **۴** ۳ ۲ ۱ تعداد کل حالات رنگ‌آمیزی سه رأس برابر است با: $\underline{۳}\ \underline{۳}\ \underline{۳} = ۲۷$

زیرا برای رنگ‌آمیزی هریک از رأس‌ها، سه انتخاب وجود دارد، بنابراین $m = ۲۷$ است.

حال اگر رنگ‌آمیزی به‌گونه‌ای انجام شود، که رأس‌های متصل به یکدیگر، هم‌رنگ نباشند، تعداد مطلوب برابر است با: $\underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱} = ۶$ و بنابراین $n = ۶$ است.