پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴** با انتخاب هر سه نقطه‌ی متمایز می‌توان یک مثلث ساخت به شرطی‌که ۳ نقطه روی یک خط نباشند، پس تعداد حالاتی را که ۳ نقطه روی یک خط باشند، از تعداد انتخاب‌های ۳ از ۱۲ کم می‌کنیم.

$$\binom{۱۲}{۳} - \underset{d_۱}{\binom{۳}{۳}} - \underset{d_۲}{\binom{۴}{۳}} - \underset{d_۳}{\binom{۵}{۳}} = \frac{۱۲!}{۹!\,۳!} - ۱ - \frac{۴!}{۳!\,۱!} - \frac{۵!}{۳!\,۲!}$$

$$= ۲۲۰ - ۱ - ۴ - ۱۰ = ۲۲۰ - ۱۵ = ۲۰۵$$

۲ ۱ ۲ **۳** ۴

اگر n تیم در یک لیگ بازی کنند؛ به طوری که هر دو تیم با هم دقیقاً یک بازی انجام دهند، تعداد بازی‌ها، برابر است با:

$$\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$\frac{n(n-۱)}{۲} = ۷۸ \Rightarrow n(n-۱) = ۱۵۶ \Rightarrow n^۲ - n - ۱۵۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (n-۱۳)(n+۱۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n - ۱۳ = ۰ \Rightarrow n = ۱۳ \checkmark \\ n + ۱۲ = ۰ \Rightarrow n = -۱۲ \end{cases}$$

غ.ق.ق (تعداد بازی‌ها نمی‌تواند منفی باشد.)

۳ ۱ ۲ **۳** ۴ برای حل این سؤال از متمم استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{کل حالات}: \binom{۹}{۵} = \frac{۹!}{۵!۴!} = ۱۲۶ \\ \text{هر دو نفر دعوت شوند (سه نفر از بقیه انتخاب شوند.)} = \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!۴!} = ۳۵ \end{array}\right\} \to ۱۲۶ - ۳۵ = ۹۱$$

۴ ۱ ۲ **۳** ۴ تعداد گروه‌های سه‌تایی از ۶ درس را محاسبه می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳! \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۰$$

یعنی علی در هر یک از این بیست روز یکی از این گروه‌های سه تایی را مورد مطالعه قرار می‌دهد که !۲۰ حالت دارد.

۵ ۱ ۲ ۳ **۴** دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: به دو نفر دو کتاب برسد و به یک نفر یک کتاب برسد.

$$\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱} \times \underset{\downarrow}{۳} = ۱۰ \times ۳ \times ۱ \times ۳ = ۹۰$$

$$\begin{cases} ۲\ ۲\ ۱ \\ A,B,C \\ ۲\ ۱\ ۲ \\ A,B,C \\ ۱\ ۲\ ۲ \\ A,B,C \end{cases}$$

حالت دوم: به دو نفر یک کتاب برسد و به یک نفر سه کتاب برسد.

$$\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱} \times \binom{۳}{۳} \times \underset{\downarrow}{۳} = ۵ \times ۴ \times ۱ \times ۳ = ۶۰$$

$$\begin{cases} ۱\ ۱\ ۳ \\ A,B,C \\ ۱\ ۳\ ۱ \\ A,B,C \\ ۱\ ۱\ ۳ \\ A,B,C \end{cases}$$

بنابراین کل حالات $۹۰ + ۶۰ = ۱۵۰$ است.

۶ ۱ ۲ ۳ **۴** هر رقم یا ۲ است یا ۳ بنابراین هر رقم ۲ حالت دارد.

کل اعداد چهار رقمی که با ارقام ۳ و ۲ می‌توان ساخت برابر $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۱۶$ تا است ولی ما از هر رقم حداکثر ۳ بار می‌توانیم استفاده کنیم. یعنی اعداد ۳۳۳۳ و ۲۲۲۲ قابل قبول نیستند پس جواب $۱۶ - ۲ = ۱۴$ تا است.

۷ ۱ **۲** ۳ ۴ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: $\binom{n}{r}$

$$\binom{n}{۲} = ۲۸ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!\,۲!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!\,۲!} = \frac{n(n-۱)}{۲} = ۲۸$$

$$\Rightarrow n(n-۱) = ۵۶ \Rightarrow n = ۸$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی: $\binom{۸}{۴} = \frac{۸!}{۴!\,۴!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!\times۴\times۳\times۲\times۱} = ۷۰$

۸ (۱) (۲) (۳) **(۴)** ابتدا ۴ زوج را انتخاب می‌کنیم و از هر زوج یک نفر را:

$$\binom{۷}{۴}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱} = \frac{۷!}{۴!\,۳!}\times۲\times۲\times۲\times۲ = \frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!\times۳\times۲\times۱}\times۲^۴ = ۳۵\times۲^۴$$

۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

پر کردن نیمکت ۳ نفره: $\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!\times۳!} = \frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳\times۲\times۱\times۳!} = ۲۰$

پر کردن نیمکت ۲ نفره از بین ۳ دانش‌آموز باقی‌مانده: $\binom{۳}{۲} = \frac{۳!}{۲!\times۱!} = \frac{۳\times۲!}{۲!} = ۳$

پر کردن نیمکت ۱ نفره با ۱ دانش‌آموز باقی‌مانده: $\binom{۱}{۱} = ۱$

پس تعداد کل راه‌های ممکن برابر است با $۲۰\times۳\times۱ = ۶۰$

۱۰ **(۱)** (۲) (۳) (۴) می‌دانیم برای تشکیل یک مستطیل، به دو خط عمودی و دو خط افقی نیاز داریم پس:

$$\binom{۵}{۲}\binom{n}{۲} = ۳۰ \Rightarrow \binom{n}{۲} = \frac{۳۰}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۳۰}{\frac{۵!}{۳!\,۲!}} = \frac{۳۰}{\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲}} = \frac{۳۰}{۱۰}$$

$$= ۳ \Rightarrow \binom{n}{۲} = ۳ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!\,۲!} = ۳ \Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!\,۲!} = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲} = ۳ \Rightarrow n(n-۱) = ۶ \Rightarrow n = ۳$$

تعداد خطوط عمودی باید سه خط باشد که در شکل ۲ خط است.

پس با اضافه کردن ۱ خط عمودی، تعداد مستطیل‌های شکل به ۳۰ افزایش پیدا می‌کند.

۱۱ **(۱)** (۲) (۳) (۴) ۳ نفر خاص، قبلاً انتخاب شده‌اند، پس باید ۲ نفر دیگر را از بین ۶، $(۶-۳=۹)$ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم. چون ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست به کمک فرمول ترکیب خواهیم نوشت:

تعداد حالت‌های انتخاب $= \binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{(۶-۲)!\,۲!} = \frac{۶\times۵\times۴!}{۴!\times۲\times۱} = ۱۵$

۱۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴) ابتدا باید ۳ منطقه از ۶ منطقه را انتخاب کنیم که قرار است از هر یک از آن‌ها یک دانش‌آموز انتخاب شود؛ برای انتخاب دانش‌آموز هر منطقه نیز ۱۵ انتخاب داریم. پس تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{۶}{۳}\times۱۵\times۱۵\times۱۵ = \frac{۶!}{۳!\,۳!}\times۱۵\times۱۵\times۱۵ = \frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۳\times۲\times۱}\times۱۵\times۱۵\times۱۵ = ۶۷۵۰۰$$

۱۳ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

انتخاب r شئ از n شئ بدون اهمیت داشتن ترتیب آن‌ها: $\binom{n}{r}$

راه حل اول: چون مسئله چیدن کتاب در قفسه است جابه‌جایی کتاب‌ها مهم است.

$$\binom{۸}{۲}\times\binom{۵}{۲}\times\underbrace{۲!}_{\text{جابجایی کتاب‌های علمی}}\times\overbrace{۲!}^{\text{جابجایی کتاب‌های تاریخی}} = ۲۸۰\times۴ = ۱۱۲۰$$

راه حل دوم:

$$\underbrace{\overset{\text{تاریخی}}{\binom{۸}{۱}}\times\overset{\text{علمی}}{\binom{۵}{۱}}}_{\text{جای یک کتاب علمی با یک کتاب تاریخی عوض شود.}}\times\underbrace{\overset{\text{تاریخی}}{\binom{۷}{۱}}\times\overset{\text{علمی}}{\binom{۴}{۱}}}_{\text{جای یک کتاب علمی با یک کتاب تاریخی به جز دو کتاب قبلی عوض شود.}} = ۸\times۵\times۷\times۴ = ۲۸۰\times۴ = ۱۱۲۰$$

۱۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از مجموعه‌ای با n عضو برابر است با: $\binom{n}{r}$

$$\binom{n}{۳} = \binom{n}{۴} \Rightarrow \frac{n!}{(n-۳)!\,۳!} = \frac{n!}{(n-۴)!\,۴!} \Rightarrow (n-۳)!\times۶ = (n-۴)!\times۲۴$$

$$\Rightarrow ۶\times(n-۳)\times(n-۴)! = ۲۴\times(n-۴)! \Rightarrow ۶\times(n-۳) = ۲۴ \Rightarrow n-۳ = ۴$$

$$\Rightarrow n = ۷$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی: $\binom{n}{۶} \overset{n=۷}{=\!=\!=} \binom{۷}{۶} = ۷$

۱۵) ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا ۳ منطقه از ۶ منطقه را انتخاب می کنیم، و سپس از هر منطقه انتخاب شده یک دانش آموز را انتخاب می کنیم.

$$\binom{۶}{۳} \times ۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵ = ۶۷۵۰۰$$

۱۶) **۱** ۲ ۳ ۴ ۴ حالت زیر ممکن است رخ دهد:

حالت ۱: هر ۵ نفر از بین $a_۵$ و $a_{۱۰}$ انتخاب شوند:

$$\binom{۶}{۵} = ۶$$

حالت ۲: ۴ نفر از بین $a_۵$ و $a_{۱۰}$ و یک نفر از برادران $a_۱$ و $a_۲$ انتخاب شود.

$$\binom{۶}{۴}\binom{۲}{۱} = ۱۵ \times ۲ = ۳۰$$

حالت ۳: ۴ نفر از بین $a_۵$ تا $a_{۱۰}$ و یک نفر از برادران $a_۳$ و $a_۴$ انتخاب شود.

$$\binom{۶}{۴}\binom{۲}{۱} = ۱۵ \times ۲ = ۳۰$$

حالت ۴: ۳ نفر از بین $a_۵$ تا $a_{۱۰}$ و یک نفر از $a_۱$ و $a_۲$ و یک نفر از $a_۳$ و $a_۴$ انتخاب شود.

$$\binom{۶}{۳}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱} = ۲۰ \times ۲ \times ۲ = ۸۰$$

کل حالات:

$$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} ۶ + ۳۰ + ۳۰ + ۸۰ = ۱۴۶$$

۱۷) ۱ **۲** ۳ ۴

$$\binom{۱۳۹۹}{۱} = \frac{۱۳۹۹!}{۱!۱۳۹۸!},\ \binom{۱۳۹۹}{۳} = \frac{۱۳۹۹!}{۳!۱۳۹۶!},\ \binom{۱۳۹۹}{۵} = \frac{۱۳۹۹!}{۵!۱۳۹۴!},\ \cdots,\ \binom{۱۳۹۹}{۱۳۹۹} = \frac{۱۳۹۹!}{۱۳۹۹!۰!}$$

بنابراین داریم:

$$۱۳۹۹! \times \left(\frac{۱}{۱!۱۳۹۸!} + \frac{۱}{۳!۱۳۹۶!} + \frac{۱}{۵!۱۳۹۴!} + \cdots + \frac{۱}{۱۳۹۹!۰!}\right) = \binom{۱۳۹۹}{۱} + \binom{۱۳۹۹}{۳} + \binom{۱۳۹۹}{۵} + \cdots + \binom{۱۳۹۹}{۱۳۹۹} = ۲^{۱۳۹۸}$$

در نتیجه:

$$\frac{۱}{۱!۱۳۹۸!} + \frac{۱}{۳!۱۳۹۶!} + \frac{۱}{۵!۱۳۹۴!} + \cdots + \frac{۱}{۱۳۹۹!۰!} = \frac{۲^{۱۳۹۸}}{۱۳۹۹!}$$

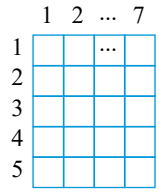
نکته: تعداد زیرمجموعه‌های فردعضوی از یک مجموعهٔ nعضوی برابر با $۲^{n-۱}$ می‌باشد.

۱۸) ۱ ۲ **۳** ۴ با هر ۴ نقطه که از این ۸ نقطه انتخاب کنیم، می‌توانیم یک چهارضلعی محدّب بسازیم:

$$\binom{۸}{۴} = \frac{۸!}{۴!۴!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۴! \times ۴ \times ۳ \times ۲} = ۷۰$$

۱۹) ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم برای رسم یک مستطیل دلخواه باید دو خط افقی و دو خط عمودی داشته باشیم. پس در این مثال تعداد کل مستطیل‌ها می‌شود:

$$\binom{۶}{۲} \times \binom{۸}{۲} = ۱۵ \times ۲۸ = ۴۲۰$$



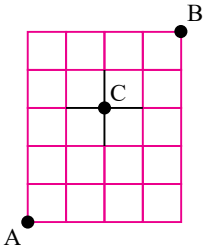
۲۰) ۱ ۲ ۳ **۴**

خانه‌های افقی را با حرف x و خانه‌های عمودی را با حرف y مشخص می‌کنیم. برای رسیدن از A به B احتیاج به آدرسی برحسب x و y داریم (آدرس مسیر مشخص شده $xxxyyxyyx$ است.)

کافی است در این ۹ خانه آدرس جای x ها یا y ها را مشخص کنیم که این کار به $\binom{۹}{۴} = \binom{۹}{۵}$ طریق انجام می‌شود.

$$\binom{۹}{۵} = \frac{۹!}{۴!۵!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴} = ۱۲۶$$

۲۱) ۱ **۲** ۳ ۴ برای آن‌که در طی حرکت از A به B از درون مربع ۲×۲ رد نشویم، کافی است که از نقطهٔ C عبور نکنیم. بنابراین تعداد حالات برابر است با:



$$\underset{A\to B}{\binom{۹}{۴}} - \underset{A\to C}{\binom{۵}{۲}}\underset{C\to B}{\binom{۴}{۲}} = \frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶}{۴\times ۳\times ۲} - ۱۰\times ۶ = ۱۲۶ - ۶۰ = ۶۶$$

۲۲ ۱ ۲ **۳** ۴ از روش غیرمستقیم (متمم) استفاده می‌کنیم. در شکل ۵ خط مستقیم وجود دارد که روی هر کدام ۴ نقطه در یک راستا هستند. اگر ۳ نقطه از این ۴ نقطه انتخاب شوند، تشکیل مثلث نمی‌دهند، پس:

$$\binom{۱۰}{۳} - ۵\times\binom{۴}{۳} = \frac{۱۰\times ۹\times ۸}{۶} - ۵\times ۴ = ۱۲۰ - ۲۰ = ۱۰۰$$

۲۳ ۱ **۲** ۳ ۴ عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد. پس دو رقم سمت راست اعداد خواسته شده باید به‌صورت مقابل باشد:

۴۰, ۲۰, ۰۴, ۳۲, ۲۴, ۱۲, ۰۰, ۴۴

$$\underset{\text{غیرصفر}}{\underline{۴}}\times\underline{۵}\times\underline{۵}\times\underset{\text{دو رقم سمت راست}}{\underline{۸}} = ۸۰۰$$

۲۴ ۱ ۲ **۳** ۴ چون دانش‌آموزان کلاس دوم حق حضور در این انتخاب را ندارند. در واقع باید سه نفر از بین ۹ نفر دیگر را انتخاب نمود.

$$C(۹,۳) = \frac{۹!}{۶!\times ۳!} = \frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶!}{۶!\times ۳\times ۲\times ۱} = ۸۴$$

۲۵ ۱ ۲ ۳ **۴** برای این که حاصل جمع دو عدد، عددی زوج شود، باید هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد باشند:

$$\text{هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد} = \binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲} = \frac{۵!}{۲!\times ۳!} + \frac{۴!}{۲!\times ۲!}$$

$$= \frac{۵\times ۴\times ۳!}{۲\times ۱\times ۳!} + \frac{۴\times ۳\times ۲!}{۲\times ۱\times ۲!} = ۱۰ + ۶ = ۱۶$$

۲۶ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دو سیاه}}\times\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک سفید}} = \frac{۵!}{۲!\,(۵-۲)!}\times\frac{۴!}{۱!\,(۴-۱)!} = \frac{۵\times ۴\times ۳!}{۲\times ۱\times ۳!}\times\frac{۴\times ۳!}{۱\times ۳!} = ۱۰\times ۴ = ۴۰$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ **۴** از هر درس دو دبیر را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۷}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۲} = \frac{۷!}{۵!\,۲!}\times\frac{۳!}{۲!\,۱!}\times\frac{۵!}{۳!\,۲!} = ۶۳۰$$

۲۸ ۱ ۲ ۳ **۴** حالت (الف): یک نفر از تهران و سه نفر از ۳ شهر دیگر در تیم هست:

$$\underset{\text{فرد تهرانی}}{\binom{۴}{۱}}\times\underbrace{\underset{\text{شهرهای دیگر}}{\binom{۴}{۳}}\underbrace{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}_{\text{از هر شهر یک نفر}}} = ۴\times ۴\times ۳^۳ = ۱۶\times ۲۷ = ۴۳۲$$

حالت (ب) از تهران نماینده نداریم و از ۴ شهر دیگرهر کدام یک نفر حضور دارد:

$$\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱} = ۳^۴ = ۸۱$$

طبق اصل جمع تعداد کل تیم‌ها برابر $۴۳۲ + ۸۱ = ۵۱۳$ است.

۲۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\binom{۸}{۳} + \binom{۸}{۴} + \binom{۸}{۵} + \binom{۸}{۶} = ۵۶ + ۷۰ + ۵۶ + ۲۸ = ۲۱۰$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-۱)!\,r!}}$$

$$\binom{n+۲}{n} = \frac{(n+۲)!}{(n+۲-n)!\,n!} = \frac{(n+۲)(n+۱)n!}{n!\,۲!} = \frac{(n+۲)(n+۱)}{۲} = \frac{۵n+۱}{۲}$$

$$\Rightarrow (n+۲)(n+۱) = ۵n+۱ \Rightarrow n^۲ + ۳n + ۲ = ۵n + ۱$$

$$\Rightarrow n^۲ - ۲n + ۱ = ۰ \Rightarrow (n-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow n = ۱$$

$$\frac{n^۲ + ۲n}{۳n} \xrightarrow{n=۱} \frac{۱+۲}{۳} = \frac{۳}{۳} = ۱$$