# پاسخ‌نامه تشریحی

**۱** ۱ **۲** ۳ ۴

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{20}\to\frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!}=\frac{1}{20}\to\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{20}\to(n+1)n=20\to n=4\to n!=4!=24$$

**۲** ۱ ۲ ۳ **۴**

کل کتاب‌های ریاضی را یک دسته تصور می‌کنیم به نام $R$

کل کتاب‌های فیزیک را یک دسته تصور می‌کنیم به نام $F$

کل کتاب‌های شیمی را یک دسته تصور می‌کنیم به $S$

برای چیدن این سه دسته کنار هم $3!$ حالت وجود دارد.

خود $R$، $5!$ حالت دارد.

خود $F$، $4!$ حالت دارد.

خود $S$، $3!$ حالت دارد.

پس طبق اصل ضرب برای چیدمان این کتاب‌ها به شکل خواسته شده $3! \times 4! \times 5! \times 3!$ حالت داریم.

**۳** ۱ ۲ ۳ ۴ حروف نقطه‌دار این کلمه «ب» و «ن» هستند. ابتدا یکی از این دو حرف را در ابتدای کلمه می‌گذاریم و با چهار حرف دیگر بقیهٔ کلمه را می‌سازیم.

ب _ _ _ _

ن

برای حرف اول دو حالت داریم و برای چهار جایگاه دیگر به‌صورت غیرتکراری به مقدار $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ حالت داریم.

در مجموع تعداد حالات را در هم ضرب می‌کنیم: $24 \times 2 = 48$

**۴** ۱ **۲** ۳ ۴

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!}=n(n+1)=30\Rightarrow n=5$$

$$\frac{n^2+5}{n!}=\frac{25+5}{5!}=\frac{30}{5\times4\times3\times2\times1}=\frac{1}{4}$$

**۵** ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا هفت کلاس را انتخاب می‌کنیم و از هر کلاس، یک نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{10}{7}\binom{15}{1}\binom{15}{1}\binom{15}{1}\binom{15}{1}\binom{15}{1}\binom{15}{1}\binom{15}{1}=$$

$$\frac{10!}{7!3!}\times15\times15\times15\times15\times15\times15\times15=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times3\times2}\times15^7=120\times15^7$$

**۶** ۱ ۲ ۳ **۴**

$$10!-11!=10!-11\times10!=10!(1-11)=10!\times-10=-10\times10!$$

$$10!+11!=10!+11\times10!=10!(1+11)=12\times10!$$

$$\frac{10!}{10!+11!}-\frac{10!}{10!-11!}=\frac{10!}{12\times10!}-\frac{10!}{-10\times10!}=\frac{1}{12}+\frac{1}{10}$$

$$=\frac{10+12}{120}=\frac{22}{120}=\frac{11}{60}$$

**۷** ۱ ۲ **۳** ۴ فرض کنیم دهگان ۱ باشد؛ الباقی ارقام به $3! = 6$ حالت کنار هم می‌نشینند پس ۶ عدد داریم که دهگان آن‌ها ۱ است.

با فرض دهگان ۳ : $3! = 6$ عدد

با فرض دهگان ۵ : $3! = 6$ عدد

با فرض دهگان ۷: $3! = 6$

می‌بینیم ۶ عدد داریم که دهگان آن‌ها ۱ و

۶ عدد داریم که دهگان آن‌ها ۳ و

۶ عدد داریم که دهگان آن‌ها ۵ و

۶ عدد داریم که دهگان آن‌ها ۷ است پس مجموعشان برابر است با $6(1+3+5+7)=6\times16=96$

**۸** ۱ **۲** ۳ ۴ هر نقطه یک طول و یک عرض دارد.

وقتی طول نقاط (با طول طبیعی) بین ۳ تا ۱۲ باشد یعنی یکی از طول‌های $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ باشد که برای سه نقطه، باید ۳ طول از این ۸ طول را انتخاب کنیم که به $\binom{8}{3}$ طریق ممکن است.

برای عرض نقاط نیز همین‌طور. در کل داریم:

$$\binom{۸}{۳}\times\binom{۸}{۳}=\binom{۸}{۳}^{۲}=\left(\frac{۸!}{۵!\,۳!}\right)^{۲}=\left(\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!\times۳\times۲}\right)^{۲}=(۵۶)^{۲}$$

۹) ۱ **۲** ۳ ۴

تعداد کلمات سه‌حرفی بدون تکرار حروف : $\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}=۶۰$

تعداد کلمات سه حرفی فاقد حرف «$H$» (بدون تکرار حروف) : $\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}=۲۴$

تعداد کلمات سه حرفی شامل حرف «$H$» (بدون تکرار حروف) $=۶۰-۲۴=۳۶$

۱۰) ۱ ۲ **۳** ۴

$۰!=۱\ ,\ ۱!=۱$

$$۵x^{۲}-۴x=۰\Rightarrow x(۵x-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ ۵x-۴=۰\Rightarrow ۵x=۴\Rightarrow x=\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

$$۵x^{۲}-۴x=۱\Rightarrow ۵x^{۲}-۴x-۱=۰\xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد}]{ax^{۲}+bx+c=۰}\begin{cases}a=۵\\ b=-۴\\ c=-۱\end{cases}$$

$$x_{۱}\ ,\ x_{۲}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

$$\Rightarrow x_{۱},x_{۲}=\frac{۴\pm\sqrt{۳۶}}{۱۰}\Rightarrow\begin{cases}x_{۱}=\frac{۴+۶}{۱۰}=۱\\ x_{۲}=\frac{۴-۶}{۱۰}=\frac{-۲}{۱۰}=\frac{-۱}{۵}\end{cases}$$

مجموعهٔ جواب‌های معادله $\left\{-\frac{۱}{۵},۰,\frac{۴}{۵},۱\right\}$ است.

۱۱) ۱ **۲** ۳ ۴

تعداد جایگشت‌های $n$ شی متمایز برابر است با: $n!$

حروف صدادار : $i\ ,\ e\ ,\ o\ ,\ a$

برای این‌که حروف صدادار کنار هم باشند، آن‌ها را یک حرف حساب می‌کنیم و جایگشت $\boxed{i,e,o,a}$ $w,h,t,b,r,d,$ را محاسبه می‌کنیم که برابر است با $۷!$ اما خود $i,e,o,a$ هم $۴!$ جایگشت دارند.

پس در کل طبق اصل ضرب $۴!\times۷!$ حالت داریم.

۱۲) ۱ ۲ **۳** ۴ معلمین و معاونین به ترتیب به $۳!$ و $۲!$ حالت می‌توانند در کنار هم جایگشت داشته باشند. از طرفی معلمین می‌توانند در ابتدا قرار گیرند و معاونین به دنبال آن‌ها و برعکس، پس دو حالت نیز ترتیب آن‌ها را داریم بنابراین خواهیم داشت:

تعداد کل حالات $=۲\times۳!\times۲!=۲\times(۳\times۲\times۱)\times(۲\times۱)=۲۴$

۱۳) ۱ **۲** ۳ ۴ دو حرف اول باید صدادار باشند یعنی باید ۲ حرف از ۳ حرف انتخاب کنیم.

و برای چهار حرف باقی‌مانده باید ۴ حرف از ۵ حرف باقی‌مانده (بی‌صدا) انتخاب کنیم:

$$P(۳,۲)\times P(۵,۴)=\frac{۳!}{(۳-۲)!}\times\frac{۵!}{(۵-۴)!}=۳!\times۵!$$

۱۴) ۱ **۲** ۳ ۴

$\boxed{SS}\ \boxed{AA}\ \boxed{OO}\ N\ P\ R\Rightarrow$ تعداد جایگشت‌ها $=۶!=۷۲۰$

۱ شئ، ۱ شئ، ۱ شئ

دقت کنید چون حروف داخل مستطیل‌ها یکسان هستند، جابه‌جایی آن‌ها را در داخل مستطیل‌ها در نظر نمی‌گیریم.

۱۵) ۱ **۲** ۳ ۴

$$P(n,n-۲)=۱۲\Rightarrow\frac{n!}{(n-(n-۲))!}=۱۲$$

$$\frac{n!}{۲!}=۱۲\Rightarrow n!=۱۲\times۲\times۱\Rightarrow n!=(۴\times۳)\times۲\times۱\Rightarrow n!=۴!\Rightarrow n=۴$$

۱۶) ۱ ۲ ۳ **۴**

انتخاب $r$ شئ از $n$ شئ بدون اولویت: $\binom{n}{r}$

حداقل ۲ پسر: ۲ پسر یا ۳ پسر یا ۴ پسر و الباقی دختر

$$\binom{۶}{۲}\binom{۸}{۲}+\binom{۶}{۳}\binom{۸}{۱}+\binom{۶}{۴}\binom{۸}{۰}=$$

$$\frac{۶!\times۸!}{۴!۲!\ ۶!\times۲!}+\frac{۶!۸!}{۳!۳!۷!۱!}+\frac{۶!\times۸!}{۴!۲!\ ۸!\times۰!}=۴۲۰+۱۶۰+۱۵=۵۹۵$$

**۱۷** ۱ ۲ ۳ **۴**

حروف مشابه: $a, a$ و $b, b$

حروف مشابه را یک حرف در نظر می‌گیریم برای اینکه کنار هم باشند و جایگشت $\boxed{a,a}, \boxed{b,b}, l, c, k, o, r, d$ را محاسبه می‌کنیم که برابر با !۸ است. دقت کنید خود $a, a$ با $b, b$ جایگشتی ندارد چرا که با جابه‌جایی آن‌ها کلمه‌ی جدیدی به‌وجود نمی‌آید.

**۱۸** ۱ ۲ **۳** ۴

$$n^{۲} + n = n(n+۱) \times \frac{(n-۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱) \times n \times (n-۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}$$

**۱۹** ۱ ۲ **۳** ۴ فرض می‌کنیم $w$ هست و ۴ حالت هم دارد.

برای سه حرف دیگر؛ باید تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۸ حرف باقی‌مانده را حساب کنیم که برابر است با:

$$P(۸,۳) = \frac{۸!}{۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۵!} = ۳۳۶$$

طبق اصل ضرب، $۳۳۶ \times ۴ = ۱۳۴۴$ حالت برای مسئله داریم.

**۲۰** ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا «ت» و «س» را همراه با یک حرف بینشان در نظر می‌گیریم: ت ــ س ــ یا س ــ ت

حال این حالات را برای قرارگیری «ت» و «س» در کلمهٔ پنج‌حرفی داریم: س ــ ت ــ ــ یا ت ــ س ــ ــ یا س ــ ت ــ ــ، پس سه حالت در این‌جا داریم و دو حالت هم که خودِ «ت» و «س» می‌توانند جایشان را با هم عوض کنند. بقیهٔ حروف در سه جایگشت دیگر به تعدادِ $۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$ حالت غیرتکراری می‌توانند قرار گیرند. حال همهٔ حالات را در هم ضرب می‌کنیم: $۶ \times ۳ \times ۲ = ۳۶$

**۲۱** ۱ ۲ **۳** ۴ واژهٔ شش حرفی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. (۳ حرف صدادار و ۵ حرف بی‌صدا داریم.)

$$\underset{\text{صدادار}}{۳} \times \underset{\text{بی‌صدا}}{۵} \times \underset{\text{صدادار}}{۲} \times \underset{\text{بی‌صدا}}{۴} \times \underset{\text{صدادار}}{۱} \times \underset{\text{بی‌صدا}}{۳} = ۳۶۰$$

یا

$$\underset{\text{بی‌صدا}}{۵} \times \underset{\text{صدادار}}{۳} \times \underset{\text{بی‌صدا}}{۴} \times \underset{\text{صدادار}}{۲} \times \underset{\text{بی‌صدا}}{۳} \times \underset{\text{صدادار}}{۱} = ۳۶۰ \rightarrow \text{مجموع} = ۳۶۰ + ۳۶۰ = ۷۲۰ = ۶!$$

**۲۲** ۱ **۲** ۳ ۴ قرار است بین افراد $a$ و $b$ دقیقاً یک فرد دیگر وارد شود که از بین افراد $f, e, d, c$ است، پس ۴ حالت وجود دارد. اگر افراد $a$ و $b$ و فرد بین آن‌ها را درون یک بسته فرض کنیم، با سه فرد باقیمانده !۴ جایگشت دارند. افراد $a$ و $b$ هم !۲ حالت جابه‌جایی دارند. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$۴ \times ۴! \times ۲! = ۴ \times ۲۴ \times ۲ = ۱۹۲$$

**۲۳** ۱ ۲ ۳ **۴** در بین حروف کلمه‌ی $DELAVAR$ دو حرف تکراری $A$ داریم بنابراین مسأله را در سه حالت مختلف زیر حل می‌کنیم:

حالت اول: ابتدا سه حرف از بین تمام حروف (بجز $A$) را انتخاب کرده و جایگشت‌های آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$D, E, L, V, R \rightarrow$ انتخاب ۳ حرف از بین ۵ حرف و جایگشت سه حرف متمایز $\binom{۵}{۳} \times \overbrace{۳!}^{\text{جایگشت ۳ حرف متمایز}} = ۱۰ \times ۶ = ۶۰$

حالت دوم: در این مرحله یکی از حروف $A$ و دو حرف دیگر از حروف غیر $A$ را انتخاب و باز جایگشت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

انتخاب ۲ حرف از ۵ حرف و جایگشت سه حرف متمایز $\binom{۵}{۲} \times \overbrace{۳!}^{\text{جایگشت ۳ حرف متمایز}} = ۱۰ \times ۶ = ۶۰$

حالت سوم: در این مرحله دو حرف $A$ و یک حرف از حروف غیر $A$ را انتخاب می‌کنیم و باز هم جایگشت آن‌ها (که این بار حرف تکراری هم دارد) حساب می‌کنیم:

انتخاب ۱ حرف از ۵ حرف و جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری یکسان $\binom{۵}{۱} = ۵ \times \overbrace{\frac{۳!}{۲!}}^{\text{جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری یکسان}} = ۵ \times ۳ = ۱۵$

بنابراین مجموع حالات برابر است با:

$$۶۰ + ۶۰ + ۱۵ = ۱۳۵$$

**۲۴** ۱ ۲ **۳** ۴ $\boxed{\text{انتخاب } r \text{ شئ از } n \text{ شئ برابر است با: } \binom{n}{r}}$

ابتدا سه جایگاه که در آن‌ها ارقام فرد بنشینند را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۵}{۳} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۳! \times ۲!} = ۱۰$$

و در آن‌ها یکی از ارقام ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ را می‌نویسیم:

$$۵ \times ۵ \times ۵$$

سپس در ۲ جایگاه باقی‌ماندهٔ یکی از ارقام ۲, ۴, ۶, ۸ را می‌نویسیم:

$$۴ \times ۴$$

در مجموع طبق اصل ضرب داریم:

$$۱۰ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۴ \times ۴ = ۵ \times ۲ \times ۵^{۳} \times ۲^{۴} = ۵^{۴} \times ۲^{۵}$$

**۲۵** ۱ ۲ **۳** ۴ $e$ها می‌توانند در خانه‌های اول، سوم و پنجم یا در خانه‌های دوم، چهارم و ششم قرار گیرند و حروف دیگر $(s, v, r)$ در خانه‌های باقی‌مانده قرار می‌گیرند. (جابه‌جایی حروف $e$ با خودشان جایگشت جدیدی به وجود نمی‌آورند.)

$$\left.\begin{array}{l}\underset{e}{\underline{۳}}\ \underset{e}{\underline{۲}}\ \underset{e}{\underline{۱}}\ \underline{\ } = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶ \\ \underset{e}{\underline{۳}}\ \underset{e}{\underline{۲}}\ \underset{e}{\underline{۱}}\ \underline{\ } = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶\end{array}\right\} \Rightarrow ۶ + ۶ = ۱۲$$

**۲۶** ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا جایگشت ۴ حرف دیگر را حساب می‌کنیم که برابر با $۴!$ حالت است.

حال دو حرف $o$ را مابین آن‌ها جای می‌دهیم که باتوجه به شکل باید ۲ خانه از ۵ خانه را انتخاب کنیم که $\binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۳!\,۲!} = ۱۰$ حالت دارد.

طبق اصل ضرب، جواب برابر $\binom{۵}{۲} \times ۴!$ می‌باشد.

**۲۷** ۴ ۳ ۲ **۱**

$$\boxed{P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{انتخاب } r \text{ شئ از } n \text{ شئ}}$$

کلمه‌ی ۶ حرفی که شامل $C$ باشد و فاقد $r$ باشد و حروفش از بین ۸ حرف انتخاب شود.

چون $c$ حتماً باید باشد پس برای ما ۵ حرف از بین ۷ حرف می‌ماند.

و چون $r$ نباید باشد برای ما ۵ حرف از بین ۶ حرف می‌ماند.

$$P(۶,۵) = \frac{۶!}{(۶-۵)!} = ۶! = ۷۲۰$$

خود $C$ نیز که قبلاً انتخاب شده بود، در هر یک از ۶ جایگاه می‌تواند بنشیند پس در کل $۷۲۰ \times ۶$ حالت داریم که برابر است با ۴۳۲۰

**۲۸** ۴ **۳** ۲ ۱ ده نفر به $۱۰!$ حالت کنار هم می‌ایستند که در نصف آن‌ها $a$ جلوتر از $b$ است، پس جواب به‌صورت $\frac{۱۰!}{۲}$ است.

**۲۹** ۴ ۳ ۲ **۱** روش اول:

$$\binom{۸}{۳} \times ۵! = ۶۷۲۰$$

روش دوم: حروف $t$، $q$ و $n$ به حالت‌های زیر می‌توانند قرار گیرند:

$$t-q-n\ ,\ t-n-q\ ,\ q-t-n\ ,\ q-n-t\ ,\ n-q-t\ ,\ n-t-q$$

که یکی از این ۶ حالت قابل قبول است یعنی حالتی که $t$ بعد از $q$ و $q$ بعد از $n$ قرار دارد پس تعداد کلمات برابر است با:

$$\frac{۱}{۶} \times ۸! = ۶۷۲۰$$

**۳۰** ۴ **۳** ۲ ۱ از روش متمم استفاده می‌کنیم. ابتدا تعداد کل حالات اعداد ۵ رقمی را می‌یابیم و سپس تعداد حالت‌هایی را که دو رقم فرد کنار هم باشند را از آن کم می‌کنیم:

تعداد کل حالات عدد ۵ رقمی با ارقام داده شده $= ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

تعداد اعداد پنج رقمی وقتی دو رقم فرد کنار هم باشند: $\underbrace{۲, ۴, ۸, \boxed{۳, ۷}}_{\text{۴ شی}} = ۴! \times ۲! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ \times ۱ = ۴۸$

تعداد حالات مطلوب $= ۱۲۰ - ۴۸ = ۷۲$