

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

می‌دانیم:

روش اول: در دنباله حسابی با تعداد جملات $39 = 2 + 37 = n$ جمله اول ۱۳ و جمله سی و نهم ۳۱ می‌باشد. جمله وسط به صورت $\frac{13 + 31}{2} = 22$ است.

روش دوم:

$$13, a_1, a_2, \dots, a_{38}, a_{39}, 31$$

$$a_{39} = a_1 + 38d \rightarrow 13 + 38d = 31 \rightarrow d = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$$

$$a_{20} = a_1 + 19d = 13 + 9 = 22 \rightarrow \text{جمله ی وسط}$$

۲ - گزینه ۴

اگر a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند آنگاه:

$$2b = a + c$$

$$2(3p + 4) = (2p + 3) + (5p - 1) \Rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \Rightarrow p = 6$$

$$\Rightarrow p = 6 \Rightarrow a_1 = 15, a_2 = 22, a_3 = 29 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 7$$

۳ - گزینه ۳ جملات مشترک دو دنباله ی عددی، یک دنباله ی عددی است که قدر نسبت آن ک.م.م قدر نسبت های دو دنباله ی اصلی است.

$$2, 7, 12, 17, \dots$$

$$8, 11, 14, 17, \dots$$

دنباله ی اعضای مشترک $17, 32, 47, \dots$

$$a_n = 17 + (n - 1) \times 15 = 15n + 2$$

$$100 \leq a_n \leq 999 \rightarrow 100 \leq 15n + 2 \leq 999 \rightarrow \frac{98}{15} \leq n \leq \frac{997}{15}$$

$$\rightarrow 7 \leq n \leq 66 \rightarrow \text{تعداد جملات} = 66 - 7 + 1 = 60$$

۴ - گزینه ۲

$$2, 9, 16, 23, 30, \boxed{37}, \dots \quad 12, 17, 22, 27, 32, \boxed{37}, \dots$$

$$\text{مشترک} \begin{cases} a_1 = 37 \\ d = [5, 7] = 35 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 35n + 2$$

$$a_n < 300 \Rightarrow 35n + 2 < 300 \Rightarrow n < 8, \dots \Rightarrow n = 8$$

اما ۲ جمله مشترک دورقمی

$$\rightarrow \text{تعداد جملات مشترک سه رقمی} = 8 - 2 = 6$$

دارد (۳۷،۷۲)

۵ - گزینه ۵

اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله ی فوق باشند آنگاه $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی هستند. لذا:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{-\frac{b}{a} = \frac{1}{4}} \frac{3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

باید $\Delta > 0$ باشد (x_1, x_2 ریشه های حقیقی معادله اند).

$$m = 4 \Rightarrow 12x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 192 < 0 \rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$m = -4 \Rightarrow 12x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \rightarrow \text{ق ق ق}$$

۶ - گزینه ۲

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} a + 9d = 17 \\ a + 18d = 35 \end{cases} \Rightarrow d = 2, a = -1 \Rightarrow a_6 = a + 5d = -1 + 10 = 9$$

۷ - گزینه ۳ سه جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت $x - d, x, x + d$ نشان می‌دهند.

با توجه به این که مجموع سه جمله برابر ۴۵ است، پس:

$$(x - d) + x + (x + d) = 45 \Rightarrow 3x = 45 \Rightarrow x = 15$$

با جای گذاری $x = 15$ و با توجه به این که حاصل ضرب سه جمله برابر با ۳۲۴۰ است، داریم:

$$(15 - d) \times 15 \times (15 + d) = 3240 \Rightarrow (15 - d)(15 + d) = \frac{3240}{15} = 216$$

$$\Rightarrow 225 - d^2 = 216 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$$

۸ - گزینه ۴ اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند آن گاه $\frac{a+c}{2} = b$ است پس:

$$a_{11} = \frac{a_{10} + a_{12}}{2} \Rightarrow a - 3 = \frac{2a + (4a - 1)}{2} \Rightarrow 2a - 6 = 6a - 1 \Rightarrow 4a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} a_{10} = -\frac{5}{2} \\ a_{11} = -\frac{17}{4} \Rightarrow d = (-6) - (-\frac{17}{4}) = -\frac{7}{4} \\ a_{12} = -6 \end{cases}$$

اگر a_m, a_n دو جمله یک دنباله حسابی باشند $a_m - a_n = (m - n)d$ است پس:

$$a_{10} - a_5 = 5d \Rightarrow a_5 = a_{10} - 5d = -\frac{5}{2} - 5(-\frac{7}{4}) = -\frac{5}{2} + \frac{35}{4} = \frac{25}{4}$$

۹ - گزینه ۱ می‌دانیم که هر جمله یک دنباله حسابی برابر است با جمله قبلی بعلاوه قدر نسبت، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} a_7 + a_8 + \dots + a_{12} &= (a_1 + d) + (a_2 + d) + \dots + (a_{11} + d) \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{11}) + 6d = 7d + 6d = 13d \end{aligned}$$

به طریق کاملاً مشابه داریم:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{12} = 7d + 12d = 19d$$

بنابراین داریم:

$$\frac{a_7 + a_8 + \dots + a_{12}}{a_7 + a_8 + \dots + a_{12}} = \frac{13d}{19d} = \frac{13}{19}$$

۱۰ - گزینه ۴ اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند آنگاه $\frac{a+c}{2} = b$ است.

در این دنباله حسابی داریم:

$$\frac{(x^2 + 2x) + (x^2 + x)}{2} = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$$

$$x = -2 \xrightarrow{\text{دنباله}} 0, 1, 2 \Rightarrow d = 1 \quad \text{غ ق ق}$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{دنباله}} 3, \frac{5}{2}, 2 \Rightarrow d = -\frac{1}{2} \quad \text{ق ق ق}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_{19} = a_1 + 18d \Rightarrow a_{19} = 3 + 18(-\frac{1}{2}) = 3 - 9 = -6$$

۱۱ - گزینه ۴

نکته: در دنباله حسابی با قدرنسبت d داریم:

$$a_m - a_n = (m - n)d$$

$$a_8^2 - a_6^2 = 20 \Rightarrow (a_8 - a_6)(a_8 + a_6) = 20 \Rightarrow (6 - 4) \times d(a_1 + 5d + a_1 + 3d) = 20$$

$$\Rightarrow 2d(2a_1 + 8d) = 20 \Rightarrow 2 \times 2d(a_1 + 4d) = 20 \Rightarrow \boxed{d \times a_8 = 5} \quad (1)$$

$$a_8^2 - a_6^2 = (a_8 - a_6)(a_8 + a_6) = (8 - 6)d(a_1 + 7d + a_1 + 5d) = 2d(2a_1 + 12d)$$

$$= 2d \times 2(a_1 + 6d) = 4d \times a_8 \xrightarrow{a_8 = 3a_8} a_8^2 - a_6^2 = 4d \times 3a_8 = 12da_8 \stackrel{(1)}{=} 12 \times 5 = 60$$

$$a_8^2 - a_6^2 = a_8^2 - a_6^2 + a_6^2 - a_6^2 = 60 + 20 = 80$$

۱۲ - گزینه ۲ می‌دانیم ضابطه‌ی اعداد طبیعی فرد به صورت $n = 2k - 1$ است که در آن $k \in \mathbb{N}$ می‌باشد.

تعداد اعداد به کار رفته از دسته‌ی اول تا آخرین جمله‌ی دسته‌ی بیستم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

پس آخرین جمله‌ی دسته‌ی بیستم، برابر با ۲۱۰امین عدد طبیعی فرد است که این عدد برابر خواهد بود با:

$$n = 2 \times 210 - 1 = 419$$