

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آن گاه: $b^2 = a \cdot c$ و b واسطه هندسی است.

$$\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b=5 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 2,5$$

۲ - گزینه ۴ در هر دنباله هندسی جمله عمومی از رابطه $a_n = a_1 q^{n-1}$ به دست می آید.

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = q^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{پس: } \frac{a_6}{a_1} = \frac{a_1 q^5}{a_1 q^1} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{(q^2)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{9}{4} = 2,25$$

۳ - گزینه ۴

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آن گاه: $b^2 = a \cdot c$

روش اول:

$$a + 3d, a + 5d, a + 11d \Rightarrow (a + 5d)^2 = (a + 3d)(a + 11d)$$

$$a^2 + 10ad + 25d^2 = a^2 + 14ad + 33d^2 \Rightarrow -4ad = 8d^2$$

$$-4a = 8d \Rightarrow a = -2d \Rightarrow q = \frac{a+5d}{a+3d} \Rightarrow q = \frac{3d}{d} = 3$$

روش دوم: نکته: اگر جملات a_k, a_m, a_n از یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند آنگاه:

$$q = \frac{k-m}{m-n} \text{ قدر نسبت دنباله هندسی}$$

بنابراین:

$$q = \frac{12-6}{6-4} = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

۴ - گزینه ۲ جمله عمومی در دنباله هندسی برابر است با:

جمله اول را $a_1 = 4$ و در نتیجه جمله پنجم را برابر $a_5 = 324$ در نظر می گیریم. با توجه به صورت سؤال، این پنج جمله، مثبت هستند، یعنی $q > 0$ و داریم:

$$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{324}{4} = 81 \xrightarrow{q>0} q = 3$$

مجموع این پنج جمله برابر است با:

$$S_5 = a_1 \left(\frac{q^5 - 1}{q - 1} \right) \Rightarrow S_5 = 4 \left(\frac{3^5 - 1}{3 - 1} \right) = 4 \times \frac{243 - 1}{2} = 484$$

۵ - گزینه ۳ اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند $2b = a + c$ است و اگر سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند $b^2 = a \cdot c$

در دنباله عددی $27, a, 3$ داریم $2a = 27 + 3 = 30$ پس $a = 15$ در دنباله هندسی $27, a, 3$ داریم $a^2 = 27 \times 3 = 81$ پس $a = 9$ یعنی 6 واحد از مقدار a کسر شده است.

۶ - گزینه ۲ اگر a و b یک دنباله هندسی تشکیل دهند آنگاه $b^2 = a \cdot c$ است.

اگر a و b یک دنباله حسابی تشکیل دهند آنگاه $b = \frac{a+c}{2}$ است.

$$a, x, b \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} a + b = 2x \rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} a, y, z \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} y^2 = az \rightarrow az = y^2 \\ y, z, b \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} z^2 = by \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضرب}} az^3 = by^3 \rightarrow y^3 = \frac{a}{b} z^3$$

$$\text{پس: } \frac{y^3 + z^3}{xyz} = \frac{\frac{a}{b} z^3 + z^3}{\left(\frac{a+b}{2}\right)(y)(z)} = \frac{z^3 \left(\frac{a}{b} + 1\right)}{\left(\frac{a+b}{2}\right)(y)(z)} = \frac{z^3 \left(\frac{a+b}{b}\right)}{\left(\frac{a+b}{2}\right)(y)} = \frac{2z^3(a+b)}{by(a+b)} = \frac{2z^3}{by} = \frac{2(by)}{by} = 2$$

۷ - گزینه ۴ جمله عمومی یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q ، برابر $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ است.

$$A = \frac{a_7 + a_8 + a_9}{a_7 + a_8 + a_9} = \frac{4}{1} = 16 \rightarrow \frac{a_1 q^6 + a_1 q^7 + a_1 q^8}{a_1 q^7 + a_1 q^8 + a_1 q^9} = \frac{a_1 q^6(1 + q + q^2)}{a_1 \cdot q^7 \cdot (1 + q + q^2)} = 16$$

$$\Rightarrow \frac{q^6}{q^2} = q^4 = 16 \rightarrow q = 2 \rightarrow a_2 + a_4 + a_8 = \frac{1}{4} \rightarrow a_1(q^2 + q^4 + q^8) = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{\frac{1}{4}}{4 + 16 + 64} = \frac{1}{112}$$

$$a_n < 1 \rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{112} \times 2^{n-1} < 1 \rightarrow 2^{n-1} < 112 \rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

این دنباله ۷ جمله کوچکتر از ۱ دارد.

۸ - گزینه ۲

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

می‌دانیم در هر دنباله حسابی:

$$b^2 = a \cdot c$$

هر سه دنباله حسابی هستند

$$\text{دنباله هندسی} \rightarrow \overbrace{a_1 \cdot a_3 \cdot a_5} \Rightarrow (a_3)^2 = a_1 \cdot a_5$$

$$\Rightarrow (a_1 + 2d)^2 = (a_1) \cdot (a_1 + 6d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 4ad + 4a_1d = a_1^2 + 6a_1d \Rightarrow 2d = a_1 \Rightarrow d = \frac{a_1}{2}$$

قدر نسبت دنباله‌ی حسابی نصف جمله اول است.

۹ - گزینه ۳

در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت d ، جمله‌ی m ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n - 1)d$ بدست می‌آید و اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند آن‌گاه $b^2 = ac$ است.

$$a_3, a_5, a_7 \Rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 4d, a_1 + 6d$$

دنباله‌ی هندسی

$$\longrightarrow (a_1 + 2d)(a_1 + 6d) = (a_1 + 4d)^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 12a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 8a_1d + 16a_1d$$

$$\Rightarrow 20a_1d + 16d^2 = 16a_1d \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 4d} 5a_1 + 4d = 4a_1 \Rightarrow a_1 = -d$$

۱۰ - گزینه ۴

اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند آن‌گاه $a + c = 2b$ است و در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت q ، جمله‌ی m ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 q^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$a_2, 2a_5, a_8 \Rightarrow a_1q, 2a_1q^5, a_1q^8$$

$$\xrightarrow{\text{دنباله‌ی حسابی}} a_1q + a_1q^8 = 4a_1q^5 \xrightarrow{\div a_1q} 1 + q^7 = 4q^4 \Rightarrow q^7 - 4q^4 + 1 = 0$$

$$q^7=A \longrightarrow A^2 - 4A + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} = q^3 \\ A = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} = q^3 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم دنباله صعودی است جمله‌ی هشتم بزرگترین جمله است.

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1q^8}{a_1q^2} = q^6 = (q^3)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 3 + 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3}$$

۱۱ - گزینه ۴ روش اول: نکته: اگر جملات a_k, a_m, a_n از یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند آنگاه:

$$q = \frac{k - m}{m - n} \text{ قدر نسبت دنباله‌ی هندسی}$$

بنابراین:

$$q = \frac{11 - 5}{5 - 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

روش دوم: فرض کنیم a_n جمله عمومی دنباله‌ی حسابی می‌باشد:

$$a_1, a_5, a_{11} \Rightarrow \text{جمله متوالی تصاعد هندسی} \Rightarrow a_5^2 = a_1 \times a_{11}$$

$$\Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 10d) \Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1d \Rightarrow 16d^2 = 2a_1d$$

$$\Rightarrow a_1 = 8d \Rightarrow q = \left(\text{قدر نسبت تصاعد هندسی} \right) = \frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 + 4d}{a_1} = \frac{8d + 4d}{8d} = \frac{3}{2}$$

۱۲ - گزینه ۳ برای هر دو جمله‌ی دلخواه از یک دنباله‌ی حسابی $a_m - a_n = (m - n)d$ است و در هر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت q ، جمله‌ی m ام از رابطه‌ی

$$a_n = a_1 q^{n-1} \text{ بدست می آید.}$$

باتوجه به سوال جمله شصت و سوم دنباله ی حسابی با جمله چهارم دنباله هندسی برابر است و جمله ی سوم دنباله حسابی با جمله دوم دنباله هندسی برابر است پس :

$$a_{63} - a_3 = (63 - 3) \cdot d \Rightarrow a_1 q^6 - a_1 q = 60d \Rightarrow d = \frac{a_1 q \cdot (q^6 - 1)}{60}$$

$$a_6 - a_1 = (6 - 1) \cdot d \Rightarrow a_1 q - a_1 = 5d \Rightarrow d = \frac{a_1 (q - 1)}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 q \cdot (q + 1) \cdot (q - 1)}{60} = \frac{a_1 (q - 1)}{5} \Rightarrow \frac{q(q + 1)}{30} = 1$$

$$\Rightarrow q^2 + q - 30 = 0 \Rightarrow (q + 6)(q - 5) = 0 \rightarrow q = -6, q = 5$$

۱۳ - گزینه ۱

می دانیم که اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آنگاه :

$$b^2 = a \cdot c \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$$

در این سوال اگر حاصل ضرب هر ۴ جمله را یک بسته حساب کنیم آنگاه این دنباله هندسی دارای ۳ جمله است که مربع جمله وسط برابر حاصل ضرب دو جمله دیگر است پس:

$$(a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8)^2 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4) \cdot (a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} \cdot a_{12}) = 12 \times 108 = 1296$$

$$\Rightarrow a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = \sqrt{1296} = 36$$