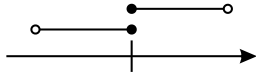


پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

برای تک عضوی شدن اشتراک دو بازه داده شده، بازه ها باید به صورت مقابل باشند:



یعنی پایان بازه اول، آغاز بازه دوم باشد.

$$\frac{a-3}{2} = \frac{2a-4}{3} \Rightarrow 3a-9 = 4a-8 \Rightarrow a = -1$$

۲ - گزینه ۳ ابتدا اعضای دو مجموعه را مشخص می کنیم:

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in N \right\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \dots \right\}$$

تمام اعضای مجموعه ی A کوچکتر یا مساوی یک هستند ولی در مجموعه ی B فقط ۸ عضو این ویژگی را دارند پس اشتراک این دو مجموعه قطعاً محدود است.

$$A \cap B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots \right\} \cap \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\}$$

۳ - گزینه ۲

مجموعه ی A به صورت $A = \{1, 3, 5, \dots\}$ و مجموعه ی B به صورت $B = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ است.

به بررسی گزینه ها می پردازیم:

نامتناهی و غیرتهی $A - B = \{1, 9, 15, 21, \dots\}$:گزینه ی اول

متناهی و غیرتهی $B - A = \{2\}$:گزینه ی دوم

نامتناهی و غیرتهی $A \cap B = \{3, 5, 7, \dots\}$:گزینه ی سوم

چهارم $A - (A \cup B) = \emptyset$:گزینه ی

چون $A \subset (A \cup B)$ است، بنابراین مجموعه ی $A - (A \cup B)$ تهی است.

۴ - گزینه ۴

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$: مجموعه ی اعداد اول

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$: مجموعه ی اعداد طبیعی فرد

غیر از عدد ۲ که زوج است تمام اعداد اول، فرد هستند پس غیر از عدد ۲ تمام اعضای مجموعه ی A در مجموعه ی B وجود دارند بنابراین: $A - B = \{2\}$ است که متناهی می باشد.

۵ - گزینه ۲

$A = \{6, 12, 18, \dots\}$, $B = \{12, 15, 18, \dots, 39\}$

$B - A$ اعضای B هستند که در A نباشند، یعنی اعضای B که بر ۶ بخش پذیر نباشند. می دانیم اعضای B بر ۳ بخش پذیرند، پس برای آن که بر ۶ بخش پذیر نباشند باید مضرب ۲ نباشند، پس کافی است اعضای فرد B را جدا کنیم:

$B - A = \{15, 21, 27, 33, 39\} \Rightarrow$ ۵ عضو دارد.

۶ - گزینه ۳ بررسی گزینه ها:

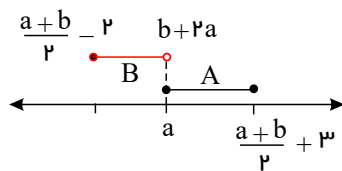
گزینه ی (۱): چون $A \cap B \subset B$ ، پس تعداد اعضای $A \cap B$ کم تر یا مساوی تعداد اعضای B اند و چون B مجموعه ای متناهی است، بنابراین $A \cap B$ نیز حتماً متناهی است.

گزینه ی (۲): $B - A \subset B$ و B مجموعه ای متناهی است. پس $B - A$ نیز مجموعه ای متناهی خواهد بود.

گزینه ی (۳): A نامتناهی و B متناهی است، پس در مجموعه ی $A - B$ از نامتناهی عضو تعداد متناهی عضو را برمی داریم، در نتیجه نامتناهی عضو باقی می ماند. یعنی $A - B$ مجموعه ای نامتناهی است.

گزینه ی (۴): $A - B \subset A$ ، پس $(A - B) - A = \emptyset$ و در نتیجه فاقد عضو است، یعنی مجموعه ای متناهی می باشد.

۷ - گزینه ۲ برای آنکه اجتماع دو بازه، یک بازه ی بسته باشد، باید روی محور چنین آرایشی را ببینیم:



(دقت کنید که $\frac{a+b}{2} - 2 < \frac{a+b}{2} + 3$ است. پس بازه ی B باید قبل از بازه ی A قرار گیرد)

داریم:

$$b + 2a = a \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = [a, 3] \\ B = [-2, a] \end{cases} \Rightarrow A \cup B = [-2, 3]$$

متمم

$$\rightarrow (A \cup B)' = R - (A \cup B) = R - [-2, 3]$$

پس اعداد $3, 2, 1, 0, -1, -2$ در آن وجود ندارد.۸ - گزینه ۳ برای بدست آوردن اعضای A داریم $(x \in \mathbb{N}, x \leq 4 \rightarrow x = 1, 2, 3, 4)$:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{2}{1} = 2 \quad \text{و} \quad x = 2 \Rightarrow \frac{2}{2} = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad x = 4 \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, 2 \right\}$$

برای به دست آوردن اعضای B داریم $(x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 2 \rightarrow x = -2, -1, 0, 1, 2)$:

$$x = 2 \Rightarrow \frac{2^2}{2} = 2 \quad \text{و} \quad x = 1 \Rightarrow \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{0}{2} = 0 \quad \text{و} \quad x = -1 \Rightarrow \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

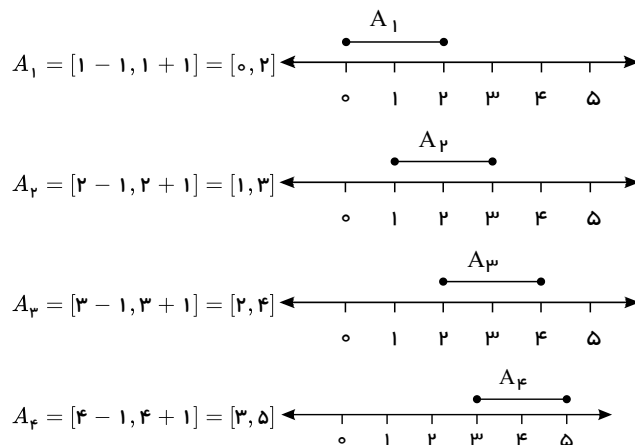
$$x = -2 \Rightarrow \frac{(-2)^2}{2} = 2 \Rightarrow B = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

$$\text{پس: } A - B = \left\{ \frac{2}{3}, 1 \right\}, \quad B - A = \{0\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \left\{ 0, \frac{2}{3}, 1 \right\}$$

سه عضو دارد.

۹ - گزینه ۲

$$A_i = [i - 1, i + 1]$$

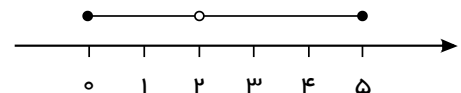
با توجه به A_1, A_i تا A_4 را تشکیل می‌دهیم:با توجه به A_1 تا A_4 داریم:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = [0, 2] \cup [1, 3] \cup [2, 4] \cup [3, 5] = [0, 5]$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [0, 2] \cap [1, 3] \cap [2, 4] = \{2\}$$

بنابراین:

$$(A_1 \cup \dots \cup A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3) = [0, 5] - \{2\}$$

اعداد صحیح این مجموعه عبارتند از $0, 1, 3, 4, 5$ که ۵ تا هستند.

۱۰ - گزینه ۳

$$\frac{2x-1}{3} < 7 \Rightarrow 2x-1 < 21 \Rightarrow 2x < 22 \Rightarrow x < 11 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16 \Rightarrow B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$$\text{پس: } (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16\} - \{1, 2, 4, 8\} = \{3, 5, 6, 7, 9, 10, 16\}$$

