

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: فصل ۴ هندسه ۱

استاد: مسعود نژادمبشر



۱ سطح مقطع یک مکعب به طول یال ۶ واحد با صفحه‌ای گذرنده بر انتهای سه یال آن که در یک رأس مشترک باشند، چند واحد مربع است؟

- ۱۸ (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) $18\sqrt{3}$ (۳) ۲۴ (۴)

۲ نقطه A و خط d و صفحه P مفروض هستند. در رسم صفحه‌ای گذرا از نقطه A ، موازی خط d و عمود بر صفحه P ، در کدام حالت، تعداد جواب‌ها، بی‌شمار است؟

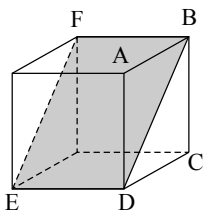
- $d \cap P = d$ (۱) $d \cap P \neq \emptyset$ (۲) $d \parallel P$ (۳) $d \perp P$ (۴)

۳ طول یال‌های مکعب مستطیل به ترتیب ۱ و $\sqrt{3}$ و ۲ واحد است زاویه قطر مکعب مستطیل با یال بزرگ‌تر چند درجه است؟

- ۳۰ (۱) ۴۵ (۲) ۶۰ (۳) ۹۰ (۴)

۴ بزرگ‌ترین مکعب ممکن داخل یک کره به قطر ۶ واحد جای گرفته است، سطح کل این مکعب کدام است؟

- ۶۳ (۱) ۵۴ (۲) ۷۲ (۳) ۸۱ (۴)



۵ در مکعب شکل مقابل، زاویه صفحه قطری سایه زده با صفحه وجه $ABCD$ ، چند درجه است؟

- ۳۰ (۱) 60° (۳) 45° (۲) 90° (۴)

۶ در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس، صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟

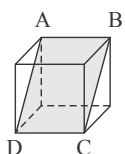
- ۸ (۱) $4\sqrt{6}$ (۲) ۱۲ (۳) $8\sqrt{3}$ (۴)

۷ در یک چهاروجهی منتظم، از وسط هر یال آن صفحه‌ای موازی وجه مقابل می‌گذرانیم، تا ۴ هرم کوچک‌تر، از چهاروجهی مفروض جدا کند. حجم جسم باقی‌مانده، چند برابر حجم چهاروجهی اولیه است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۰ (۴)

۸ مکعبی به طول یال ۲ واحد در داخل کوچک‌ترین کره ممکن جای گرفته است. مساحت این کره کدام است؟

- 8π (۱) 9π (۲) 12π (۳) 18π (۴)



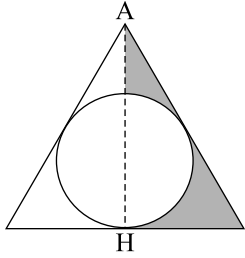
۹ در مکعب شکل مقابل، مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر $3\sqrt{2}$ است. سطح کل مکعب چند سانتی‌متر مربع است؟

- ۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۴) ۱۸ (۳)

۱۰ یک دوزنقه قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل، کدام است؟

- 36π (۱) 38π (۲) 39π (۳) 40π (۴)

۱۱) در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$ واحد، حجم حاصل از دوران هر دو سطح سایه زده شده، در حول ارتفاع AH ، کدام است؟



۲) $\frac{3\pi}{2}$

۱) $\frac{4\pi}{3}$

۴) $\frac{5\pi}{3}$

۳) 2π

۱۲) هر مکعب چند صفحه تقارن دارد؟

۴) ۹

۳) ۸

۲) ۷

۱) ۶

۱۳) در یک مکعب، صفحه گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می کند. نسبت حجم های این دو قطعه، کدام است؟

۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

۲) $\frac{1}{3}$

۱) $\frac{1}{4}$

۱۴) در داخل نیمکره به شعاع ۹ واحد، استوانه ای به ارتفاع ۶ واحد جای گرفته است. بیشترین حجم ممکن این استوانه، کدام است؟

۴) 270π

۳) 240π

۲) 210π

۱) 180π

۱۵) سه رأس A و B و C از مکعبی را چنان انتخاب می کنیم که هر دو رأس آن از یک یال نباشد مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت یک وجه مکعب است؟

۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۱۶) در یک چهاروجهی منتظم، هر وجه آن مثلث متساوی الاضلاع است. طول هر یال آن $2\sqrt{6}$ واحد است. ارتفاع این هرم، کدام است؟

۴) ۴

۳) ۳

۲) $2\sqrt{3}$

۱) $2\sqrt{2}$

۱۷) حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه ABC با ضلع های قائم $AB = 5$ ، $AC = 2\sqrt{6}$ ، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB ، کدام است؟

۴) 80π

۳) 75π

۲) 70π

۱) 60π

۱۸) سه نقطه A ، B و C غیر واقع در یک راستا و خط Δ غیر موازی با صفحه این سه نقطه مفروض هستند. تعداد صفحات موازی Δ که هر سه نقطه مفروض از آن به یک فاصله باشند، کدام است؟

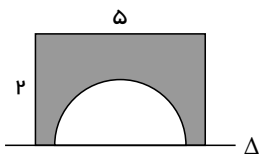
۴) ۴

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

۱۹) سطح محدود به مستطیل 5×2 و نیم دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می کند. حجم جسم حاصل، چند برابر π است؟



۲) ۱۵٫۵

۱) ۱۵

۴) ۱۷

۳) ۱۶٫۵

۲۰) در فضا، دو خط ℓ_1 و ℓ_2 موازی هستند. اگر خط d خط ℓ_1 را در یک نقطه قطع کند، کدام مورد در خصوص وضعیت خط d و ℓ_2 همواره درست است؟

۴) غیر موازی اند.

۳) غیر متقاطع اند.

۲) موازی اند.

۱) متناظرند.

۲۱) عکس کدام قضیه در فضا برقرار است؟

- ۱) اگر دو خط d و d' موازی باشند، آنگاه هر خط عمود بر d بر خط d' عمود است.
- ۲) اگر خطی لااقل با یک خط از صفحه‌ای موازی باشد، آنگاه آن خط با صفحه مفروض موازی است.
- ۳) اگر دو صفحه P و Q موازی باشند، آنگاه فصل مشترک‌های صفحه R با آن دو صفحه موازی‌اند.
- ۴) اگر دو صفحه P و Q موازی باشند، آنگاه بر روی دو خط متقاطع پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کنند.

۲۲) خط Δ با کدام شرایط می‌تواند موازی صفحه P و عمود بر صفحه Q باشد؟

۴) $\Delta \parallel (P \cap Q)$

۳) $\Delta \perp (P \cap Q)$

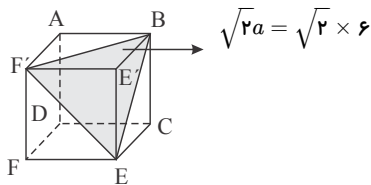
۲) $P \cap Q = \emptyset$

۱) $P \perp Q$

پاسخ نامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

سطح مقطع حاصل، مثلث متساوی الاضلاع BEF' به ضلع $a\sqrt{2}$ است.

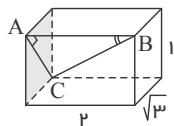


$$\sqrt{2}a = \sqrt{2} \times 6$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2} \times 6)^2 = 18\sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲ اگر $d \perp P$ ، آن گاه تمام صفحات موازی d و گذرا از نقطه A بر صفحه P عمود هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳ با توجه به شکل مقابل اگر BC قطر مکعب مستطیل باشد چون AB بر وجه مقابل عمود است پس $\angle BAC = 90^\circ$ که $AC = 2$ و $AB = 2$ پس



در نتیجه مثلث CAB قائم الزاویه متساوی الساقین است. $\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{2} = 1$ یعنی $\hat{B} = 45^\circ$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴ وقتی بزرگ ترین مکعب ممکن داخل کره به قطر ۶ محاط می شود که قطرهای آنها بر هم منطبق باشند. پس داریم:

$$2R = \sqrt{3}a \Rightarrow 6 = \sqrt{3}a \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

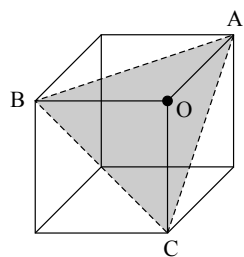
حال با معلوم بودن طول یال های این مکعب، سطح کل این مکعب برابر است با:

$$S_{\text{کل}} = 6a^2 = 6(2\sqrt{3})^2 = 6 \times 12 = 72$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ توجه کنید که پاره خط BF بر صفحه $ABCD$ عمود است زیرا بر تمام خطوط این صفحه که از نقطه B می گذرند عمود می باشد. پاره خط BF عضو (متعلق)

صفحه سایه زده است. پس صفحه $BDEF$ بر صفحه $ABCD$ عمود است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶



انتهای سه یالی که از رأس O می گذرند، نقاط A و B و C هستند و طراح سوال مساحت مثلث متساوی الاضلاع ABC را خواسته است (دقت کنید که سه

ضلع این مثلث قطرهای سه مربع یکسان هستند و طول قطر یک مربع به ضلع a برابر $a\sqrt{2}$ است. بنابراین طول اضلاع مثلث متساوی الاضلاع برابر $4\sqrt{2}$ است).

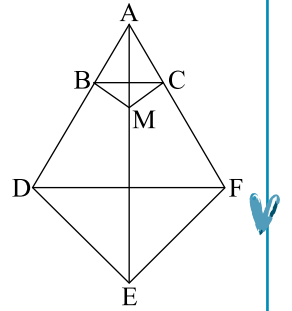
$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷ اگر صفحه ای موازی با قاعده یک هرم آن را قطع کند، آنگاه نسبت حجم هرم ایجاد شده به حجم هرم اولیه، مساوی توان سوم نسبت یال های این دو هرم است.

مطابق شکل داریم:

$$\frac{AB}{AD} = k = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{حجم هرم } ABMC}{\text{حجم هرم کل}} = k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{\text{حجم هرم کل} = \frac{1}{8} = \text{حجم هر هرم جداشده}}$$

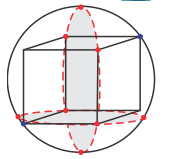


$$\frac{\text{حجم جسم باقی مانده}}{\text{حجم هرم کل}} = 1 - \frac{\text{حجم هرم کل} \left(\frac{1}{8} \right)}{\text{حجم هرم کل}} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

وقتی مکعب درون کره محاط می شود، آنگاه قطر مکعب برابر قطر کره خواهد بود. داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\underbrace{\text{قطر مکعب}}_{a\sqrt{3}} = \underbrace{\text{قطر کره}}_{2R} \rightarrow 2\sqrt{3} = 2R \rightarrow R = \sqrt{3}$$

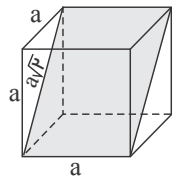
$$S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 = 4\pi(\sqrt{3})^2 = 12\pi$$



اگر ضلع مکعب a باشد اندازه قطر وجه مکعب $a\sqrt{2}$ است، پس مساحت $ABCD$ برابر $a^2\sqrt{2}$ است. طبق فرض داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

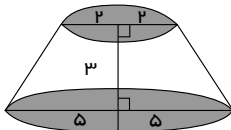
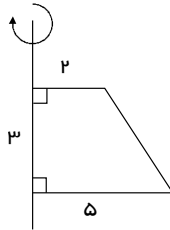
$$a^2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{سطح کل مکعب} : S = 6a^2 = 6 \times 3 = 18$$



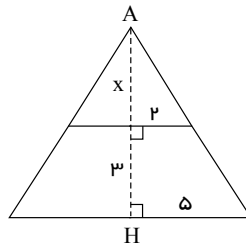
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

روش اول: ابتدا شکل دوزنقه را رسم می کنیم:



اگر این دوزنقه را حول ساق قائم دوران دهیم یک مخروط ناقص به صورت زیر حاصل می شود.

ابتدا مخروط کامل را پیدا می کنیم:



برای این منظور دو ساق را امتداد می دهیم تا در راس A یکدیگر را قطع کنند. با توجه به متشابه بودن مثلث کوچک با مثلث بزرگ داریم:

$$\frac{x}{x+3} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x = 2x + 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

حالا ابتدا حجم مخروط کامل را به دست می آوریم:

$$V_{\text{مخروط کامل}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \times AH = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times (2+3) = \frac{125}{3}\pi$$

سپس حجم مخروط کوچک بالایی را از کل کم می کنیم.

می دانیم مخروط کوچک با بزرگ متشابه است و نسبت تشابه آنها $k = \frac{2}{5}$ است پس نسبت حجمشان $k^3 = \frac{8}{125}$ است. بنابراین $\frac{8}{125}$ از کل بریده می شود و $\frac{117}{125}$ آن باقی می ماند. پس حجم باقی مانده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$V = \frac{117}{125} \times \frac{125\pi}{3} = \frac{117\pi}{3} = 39\pi$$

مخروط ناقص

روش دوم: (نکته) حجم یک مخروط ناقص با مساحت قاعده‌های S , S' و ارتفاع h برابر است با:

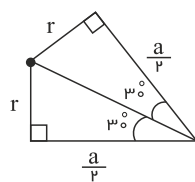
$$V = \frac{h}{3}(S + S' + \sqrt{SS'})$$

در نتیجه طبق نکته فوق و فرض سؤال داریم:

$$V = \frac{3}{3}(25\pi + 4\pi + \sqrt{25\pi \times 4\pi}) = 39\pi$$

۱۱) اولاً شعاع دایره محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع، مطابق شکل، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tan 30^\circ = \frac{r}{\frac{a}{2}} \Rightarrow r = \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



از طرفی ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطه $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ به دست می‌آید.

از دوران گفته شده یک مخروط ایجاد می‌شود که یک کره از آن حذف شده است. داریم:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$$

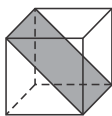
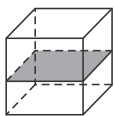
$$= \frac{\pi (2\sqrt{3})^3 \sqrt{3}}{24} = 3\pi$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a^3}{6}\right) = \frac{4}{3}\pi$$

$$\Rightarrow \text{حجم مورد نظر} = 3\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

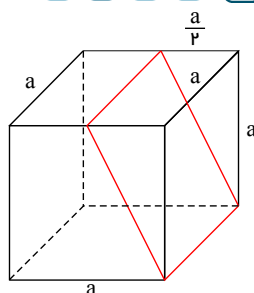
۱۲) هر مکعب ۹ صفحه تقارن دارد، ۳ صفحه صفحاتی هستند که وسط‌های هر ۴ یال موازی را به هم وصل می‌کنند و ۶ صفحه صفحاتی هستند که دو یال موازی

غیرواقع در یک صفحه را به هم وصل می‌کند.



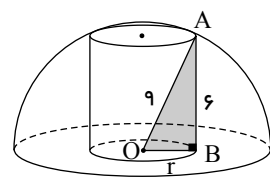
۱۳) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\text{حجم قطعه کوچکتر}}{\text{حجم قطعه بزرگتر}} = \frac{\frac{1}{3} \times S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع}}{\text{حجم مکعب} - \text{حجم قطعه کوچکتر}} = \frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{a}{2} \times a\right)}{a^3 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{a}{2} \times a\right) \times a} = \frac{\frac{1}{6}a^2}{\frac{2}{3}a^3} = \frac{1}{4}$$



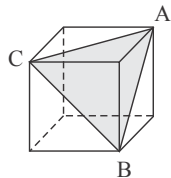
۱۴ ۴ ۳ ۲ ۱

مطابق شکل و فرض داریم:



۱۵ ۴ ۳ ۲ ۱

مثلث ABC مثلث متساوی الاضلاع است زیرا هر ضلع آن برابر قطر وجه مکعب یعنی $a\sqrt{2}$ است.



$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (a\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{\text{مساحت یک وجه}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۶ ۴ ۳ ۲ ۱ نکته: در چهاروجهی منتظم به طول یال a، طول ارتفاع وارد بر یک وجه آن برابر $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ است، پس:

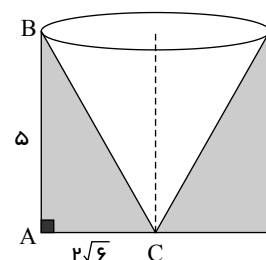
$$a = 2\sqrt{6} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 2\sqrt{6} = 4$$

۱۷ ۴ ۳ ۲ ۱

جسم حاصل یک استوانه است که یک مخروط قائم از آن جدا شده است.

$$V_{\text{هاشورخورده}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi \times (2\sqrt{6})^2 \times 5 - \frac{1}{3} \pi \times (2\sqrt{6})^2 \times 5 = \frac{2}{3} \pi \times 24 \times 5 = 80\pi$$

داریم:



۱۸ ۴ ۳ ۲ ۱

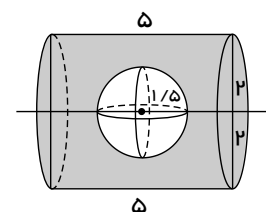
با انتخاب نقاط وسط دو ضلع مثلث، می توان از آنها صفحه ای به موازات Δ گذراند که این صفحه پاسخ مسأله است. اما به سه طریق می توان وسط دو ضلع از مثلث را انتخاب کرد. (یعنی در مثلث ABC وسط اضلاع (AC, AB) یا (BC, AB) یا (BC, AC) را می توان انتخاب نمود) بنابراین مسأله ۳ جواب دارد.

۱۹ ۴ ۳ ۲ ۱

با دوران شکل داده شده حول خط Δ ، شکل فضائی حاصل یک استوانه به شعاع ۲ و ارتفاع ۵ بوده که از درون آن کره ای به شعاع ۱٫۵ حذف شده است. داریم:

$$V_{\text{حاصل}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi \times 2^2 \times 5 - \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 20\pi - \frac{9}{2} \pi = \frac{31}{2} \pi$$

$$\begin{cases} V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h \\ V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{cases} \quad \text{یاد آوری:}$$



۲۰ ۴ ۳ ۲ ۱

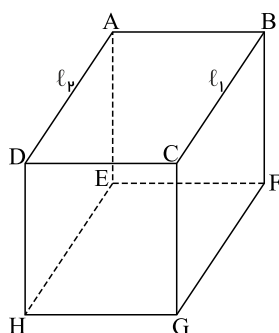
دو خط d و ℓ_p الزاماً غیر موازی (متنافر یا متقاطع) هستند.

برای مثال:

- اگر خط d یال CG فرض شود، ℓ_1 را قطع کرده و با ℓ_p متنافر است.

- اگر خط d یال AB فرض شود ℓ_1 را قطع کرده است و با ℓ_p نیز متقاطع است.

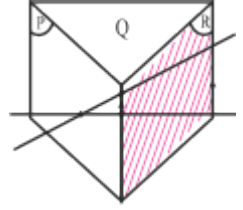
اثبات با استفاده از برهان خلف:



$$\left. \begin{matrix} d \parallel \ell_p \\ \ell_1 \parallel \ell_p \end{matrix} \right\} \rightarrow d \parallel \ell_1 \quad \text{تناقض}$$

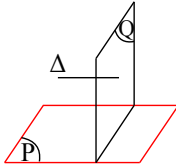
فرض خلف باطل و حکم برقرار است یعنی دو خط d، ℓ_p الزاماً غیر موازی هستند. ℓ_1 ، d متقاطع اند: فرض

گزینه (۱) که درست نیست، شکل زیر هم، عکس گزینه‌های (۳) و (۴) را رد می‌کند:



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

اگر دو صفحه P و Q بر هم عمود باشند، هر خط عمود بر Q با P موازی است.



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴

۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴

۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴