



۱ در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه A ، ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند. کدام نامساوی همواره صحیح است؟

- ① $AB > BD$ ② $AD > BD$ ③ $AB > AD$ ④ $BD > AD$

۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، $\hat{A} = 80^\circ$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در نقاط M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

- ① ۱۵ ② ۲۰ ③ ۲۵ ④ ۳۰

۳ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، نقطه M وسط ساق AB و عمودمنصف آن، ساق AC را در نقطه N قطع می‌کند. اگر $\hat{NBC} = 54^\circ$ باشد، اندازه زاویه MNB چند درجه است؟

- ① ۴۸ ② ۵۶ ③ ۶۶ ④ ۷۸

۴ چند نقطه متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحه مختصات، می‌توان یافت که فاصله رأس C از نقطه A و خط شامل پاره‌خط AB ، به ترتیب ۷ و ۵ واحد باشد؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۵ اگر بخواهیم متوازی‌الاضلاع به ضلع 4.9cm با قطرهای 6.2cm ، 3.6cm رسم کنیم، رسم این شکل هندسی چند جواب دارد؟

- ① یک جواب دارد. ② دو جواب دارد. ③ جواب ندارد. ④ بی‌شمار جواب دارد.

۶ پاره‌خط AB به اندازه ۸ واحد در صفحه مختصات، مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟

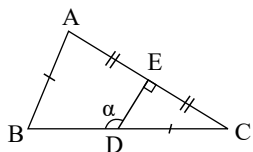
- ① لوزی ② متوازی‌الاضلاع ③ مستطیل ④ دوزنقه متساوی‌الساقین

۷ مثلث ABC یک مثلث حاده‌الزاویه است. عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویه B در نقطه M در خارج مثلث متقاطع‌اند. کدام گزینه درست است؟

- ① $\hat{A} > \hat{B}$ ② $\hat{A} < \hat{B}$ ③ $\hat{B} > 2\hat{C}$ ④ $\hat{B} < 2\hat{C}$

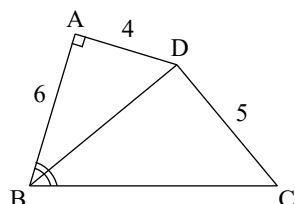
۸ در یک مثلث با زاویه 138° ، کوچک‌ترین زاویه بین دو نیمساز خارجی به درجه، کدام است؟

- ① ۲۱ ② 11.5 ③ 34.5 ④ ۴۲



۹ در شکل مقابل، اگر $AC = BC$ باشد، آنگاه زاویه α چند درجه است؟

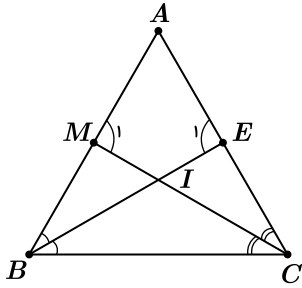
- ① ۱۰۸ ② ۱۱۶ ③ ۱۲۶ ④ ۱۳۲



۱۰ در شکل مقابل، BD نیمساز $\hat{ABC}$ است. طول BC کدام است؟

- ① ۷ ② ۸ ③ ۹ ④ ۱۰

۱۱ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C یکدیگر را در نقطه I قطع کرده‌اند. اگر $BI > CI$ ، آنگاه کدام یک از نتیجه‌گیری‌های زیر لزوماً درست نیست؟



۱ $AB > AC$

۲ $\hat{E}_1 > \hat{M}_1$

۳ $\hat{C} > \hat{B}$

۴ $IE < IM$

۱۲ برای رسم خط موازی با یک خط مفروض در صفحه حداقل چند کمان باید رسم کنیم؟ (با تغییر)

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۱۳ در مثلث ABC که $\hat{B} > \hat{C}$ ، نیمساز داخلی AD را رسم می‌کنیم. اگر M و M' به ترتیب وسط اضلاع AB و AC باشند، نسبت مساحت مثلث BDM به مساحت مثلث $DM'C$ چگونه است؟

۴ برابر $\frac{1}{2}$

۳ برابر ۱

۲ بزرگ‌تر از ۱

۱ کوچک‌تر از ۱

۱۴ چه تعداد از عبارت‌های زیر یک گزاره نیست؟

الف) مجموع زوایای خارجی هر مثلث 360° است.

ب) از هر نقطه خارج یک خط، حداقل دو خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.

ج) نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌رس هستند.

د) عمود منصف‌های مثلث می‌توانند هم‌رس نباشند.

۴ سه

۳ دو

۲ یک

۱ صفر

۱۵ برای رسم نیمساز زاویه $\hat{XOY} = 60^\circ$ این‌گونه عمل می‌کنیم:

ابتدا به مرکز O کماتی به شعاع واحد رسم می‌کنیم تا OX و OY را در A و B قطع کند. سپس به مرکزهای A و B دو کمان به شعاع‌های R که $R > a$ رسم می‌کنیم.

مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۴ $\frac{2\sqrt{2}}{6}$

۳ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲ $\frac{1}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

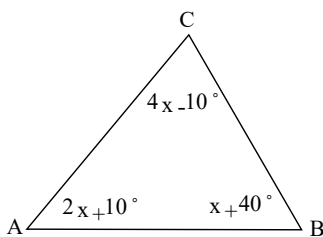
۱۶ در مثلث ABC کوتاه‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

۱ BC

۲ AC

۳ AB

۴ هر سه ضلع برابرند.



۱۷ نقطه M روی نیمساز زاویه $\hat{XOY} = 94^\circ$ واقع است. اگر MH' و MH به ترتیب بر OY و OX عمود باشند، آنگاه لزوماً:

۴ $HH' < HM < OH$

۳ $OH < OM < HM$

۲ $OH < MH' < OM$

۱ $MH < OH < OM$

۱۸ چند مثلث متمایز ABC وجود دارد که در آن $BC = 7$ ، $AB = 2$ و طول میانه وارد بر BC برابر ۵ باشد؟

۴ صفر

۳ بی‌شمار

۲ ۲

۱ ۱

۱۹ در چهارضلعی $ABCD$ ، $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$ و قطر BD نیمساز زاویه‌های B و D است. اگر $BD = 15$ ، $AD = 2x - 1$ و

$DC = x + 4$ باشد، محیط چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

۴ ۴۲

۳ ۳۶

۲ ۳۰

۱ ۲۴

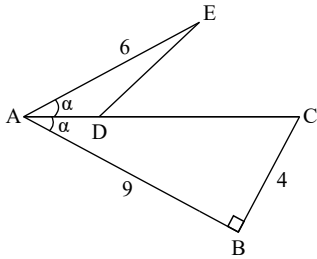
۲۰ فرض کنید طول پاره خط AB برابر با ۱۳ واحد و طول پاره خط BC برابر با ۹ واحد باشد. اگر نقطه C روی خط گذرنده از A و B واقع نباشد، فاصله بین دو نقطه A و C چند واحد می تواند باشد؟

۴ ۲۱

۳ ۲۳

۲ ۲۲

۱ ۴



۲۱ در شکل مقابل اگر E روی عمود منصف CD واقع باشد، آنگاه طول ED کدام است؟

۱ ۳٫۵

۲ ۴

۳ ۵

۴ ۴٫۵

۲۲ تعداد نقاطی در صفحه که از خط d و نقطه A به فاصله ۸ باشند، چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

۴ ۵

۳ ۴

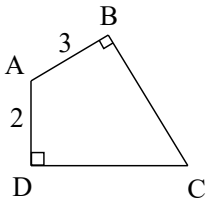
۲ ۳

۱ ۲

۲۳ در مثلث ABC ، زاویه A حاده است. اگر عمود منصف های دو ضلع AC و AB یکدیگر را در نقطه O قطع کنند، در این صورت زاویه $\widehat{BOC}$ همواره برابر کدام است؟

۴ $2\hat{A}$ ۳ $\frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$ ۲ $\hat{B} + \hat{C}$ ۱ $90^\circ + \frac{1}{2}\hat{A}$

۲۴ در چهارضلعی $ABCD$ زوایای B و D قائمه اند. امتداد دو ضلع BC و AD یکدیگر را در نقطه M و امتداد دو ضلع AB و CD یکدیگر را در نقطه N قطع می کنند. کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱ AC از وسط MN می گذرد.۲ AC بر MN عمود است.۳ AC پاره خط MN را به نسبت ۲ به ۳ قطع می کند.۴ اگر E محل برخورد AC و MN باشد، BDE متساوی الاضلاع است.

۲۵ با معلومات $BC = 2$ ، $m_b = 6$ و $m_c = 9$ ، چند مثلث قابل رسم است؟

۴ بی شمار

۳ ۲

۲ ۱

۱ ۰

۲۶ دو نقطه A و B به فاصله ۵ سانتی متر از یکدیگر قرار دارند. چند نقطه را می توان یافت که از نقطه A ، ۲ سانتی متر و از نقطه B ، ۴ سانتی متر فاصله داشته باشند؟

۴ بی شمار

۳ ۲

۲ ۱

۱ هیچ

۲۷ چند نقطه روی ضلع BC یا امتداد آن از مثلث غیر متساوی الساقین ABC وجود دارد که از خط های شامل ضلع های AB و AC به یک فاصله باشند؟

۴ چهار

۳ دو

۲ یک

۱ صفر

۲۸ در $\triangle ABC$ ، $\hat{A} = 70^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$. اگر H محل برخورد ارتفاع های مثلث باشد. اندازه ی $\widehat{BHC}$ برابر است با:

۴ 130° ۳ 50° ۲ 110° ۱ 70°

۲۹ در مثلثی به طول اضلاع ۵، ۵ و ۶ واحد، O نقطه هم رسی عمود منصف ها است. فاصله O از ضلع بزرگ تر این مثلث چند واحد است؟

۴ ۱

۳ 0.875 ۲ 0.75 ۱ 0.625

۳۰ دو نقطه A و B و خط d داده شده اند. می خواهیم مثلث متساوی الساقینی رسم کنیم که رأسش روی d و قاعده آن پاره خط AB باشد، با توجه به اوضاع A ، B و d ، تعداد جواب های ممکن برای رسم مثلث کدام نمی تواند باشد؟

۴ بی شمار جواب

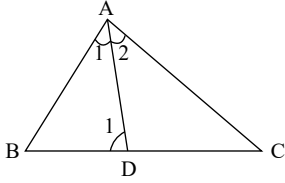
۳ هیچ جواب

۲ دو جواب

۱ یک جواب

پاسخ نامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

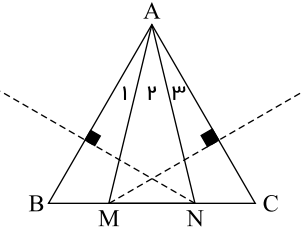


چون AD نیمساز است، پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، از طرفی چون $\hat{D}_1$ زاویه خارجی مثلث ADC است، داریم:

$$\hat{D}_1 = \hat{A}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_1$$

در مثلث ABD می‌دانیم ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر، در نتیجه: $\hat{D}_1 > \hat{A}_1 \Rightarrow AB > BD$
گزینه‌های دیگر بسته به شرایط، می‌توانند درست یا نادرست باشند و به عنوان یک قضیه کلی قابل بیان نیستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲ می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است. بنابراین:



$$\left. \begin{aligned} MA = MC &\rightarrow \hat{A}_{2,3} = \hat{C} \rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = \hat{C} \\ NA = NB &\rightarrow \hat{A}_{1,2} = \hat{B} \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} \end{aligned} \right\}$$

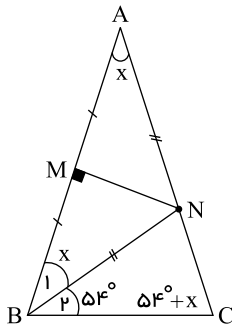
طرفین دو تساوی

$$\rightarrow (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3) + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C} \rightarrow \hat{BAC} + \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{BAC} \rightarrow 180^\circ + \hat{A}_2 = 180^\circ - 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 20^\circ$$

را جمع می‌کنیم

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است. بنابراین:



$$NA = NB \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A} = x$$

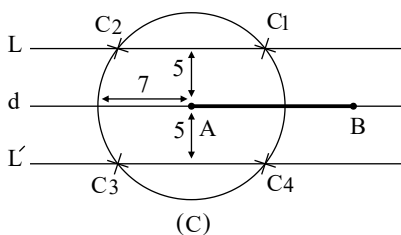
$$AB = AC \rightarrow \hat{C} = \hat{B}_{1,2} = 54^\circ + x$$

$$\hat{ABC} : x + (54^\circ + x) + (54^\circ + x) = 180^\circ \rightarrow 3x = 72^\circ \rightarrow x = 24^\circ$$

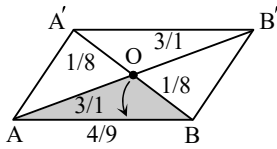
$$\hat{BMN} : \hat{MNB} = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴ مجموعه نقاطی از صفحه A به فاصله ۷ واحد قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A با شعاع ۷ واحد است. (دایره C). مجموعه نقاطی از صفحه که از خط شامل پاره خط

AB (د) به فاصله ۵ واحد هستند، دو خط موازی d به فاصله ۵ واحد از آن در دو طرفش است (خط‌های L و L'). محل برخورد دایره (C) با خط‌های L و L' جواب مسئله است. پس چهار نقطه C_1, C_2, C_3, C_4 مطلوب سؤال هستند.



۱ ۲ ۳ ۴ ۵

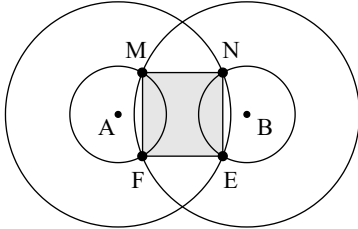


اگر شکل را رسم شده فرض کنیم، برای رسم این متوازی الاضلاع ابتدا باید مثلث OAB را بنا کنیم؛ برای رسم این مثلث ابتدا ضلع AB را رسم کرده، سپس باید دو کمان با شعاع‌های 1.8 cm و 3.1 cm را رسم کرد، که این دو کمان همدیگر را روی AB قطع می‌کنند، یعنی مثلث OAB قابل ساختن نیست؛ پس مسئله جواب ندارد.

$$\triangle OAB : OA + OB = 3.1 + 1.8 = 4.9 = AB$$

پس در مثلث OAB رابطه نامساوی مثلثی برقرار نیست.

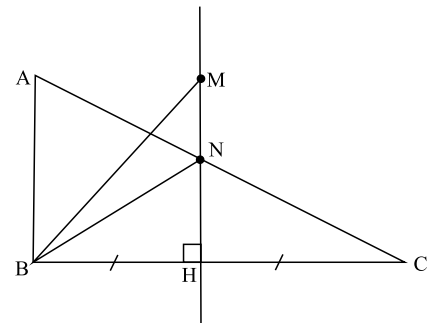
۱ ۲ ۳ ۴ ۶ چهارضلعی $MNEF$ مستطیل است.



۱ ۲ ۳ ۴ ۷ با توجه به شکل زیر نقطه تقاطع ضلع AC و عمود منصف ضلع BC را N می‌نامیم و N را به B وصل می‌کنیم. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} N \rightarrow NB = NC \rightarrow \hat{NBH} = \hat{NCH} \\ MBH > NBH \end{array} \right\} \xrightarrow{\times 2} MBH > NCH \rightarrow$$

$$2\hat{MBH} > 2\hat{NCH} \rightarrow \hat{B} > 2\hat{C}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۸ با توجه به شکل کوچک‌ترین زاویه بین دو نیمساز خارجی، محل برخورد نیمسازهای خارجی B و C است. داریم:

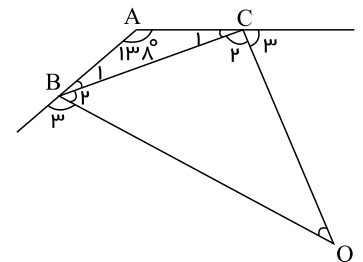
$$\triangle ABC : 138^\circ + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 42^\circ$$

$$\triangle BOC : \hat{O} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$$

$$\rightarrow \hat{O} + \left(\frac{180^\circ - \hat{B}_1}{2} \right) + \left(\frac{180^\circ - \hat{C}_1}{2} \right) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \hat{O} + \cancel{180^\circ} - \left(\frac{\hat{B}_1 + \hat{C}_1}{2} \right) = \cancel{180^\circ}$$

$$\rightarrow \hat{O} = \frac{\hat{B}_1 + \hat{C}_1}{2} = \frac{42^\circ}{2} = 21^\circ$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۹ DE پاره خط AC را نصف کرده و بر آن عمود است. از A به D وصل می‌کنیم. D بر روی عمود منصف AC واقع است، بنابراین $AD = DC$ و چون

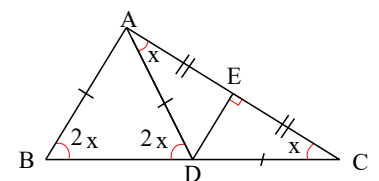
$AB = DC$ پس $AB = AD$ است.

با فرض $\hat{C} = x$ در مثلث ADC داریم:

$$DA = DC \Rightarrow \hat{DAC} = x$$

$$\triangle ADC : \hat{ADB} \Rightarrow \hat{ADB} = x + x = 2x$$

$$\xrightarrow{AB=AD} \hat{B} = 2x \xrightarrow{AC=BC} \hat{BAC} = \hat{B} \Rightarrow \hat{BAC} = 2x$$

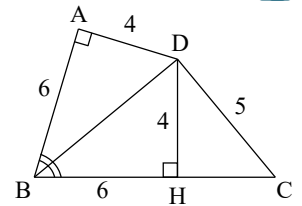


$$\triangle ABC : \hat{B} + \hat{C} + \hat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

$$\alpha = 2x + (90^\circ - x) = 90^\circ + x = 90^\circ + 36^\circ = 126^\circ$$

۱۰. از D بر BC عمود می‌کنیم. چون D روی نیمساز زاویه ABC قرار دارد. پس:

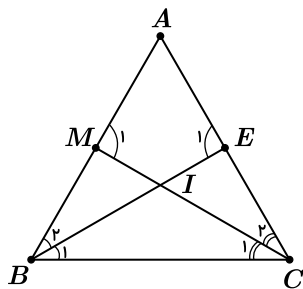
$$\begin{cases} DH = AD = 4 \\ BH = AB = 6 \end{cases}$$



در مثلث قائم‌الزاویه DHC بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

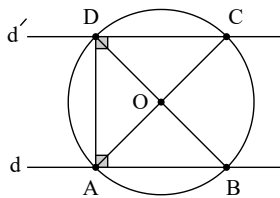
$$HC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \Rightarrow BC = BH + HC = 6 + 3 = 9$$

۱۱. در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است:



$$\triangle BIC : BI > CI \rightarrow \hat{C}_1 > \hat{B}_1 \rightarrow 2\hat{C}_1 > 2\hat{B}_1 \rightarrow \hat{C} > \hat{B} \rightarrow AB > AC$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BEC : \text{خارجی } \hat{E}_1 = \hat{B}_1 + \hat{C} = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{C}_r \\ \triangle BMC : \text{خارجی } \hat{M}_1 = \hat{C}_1 + \hat{B} = \hat{C}_1 + \hat{B}_1 + \hat{B}_r \end{array} \right\} \xrightarrow{\hat{C}_r > \hat{B}_r} \hat{E}_1 > \hat{M}_1$$



۱۲. خط دلخواه d را در صفحه در نظر بگیرید. برای رسم خطی موازی با آن مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ - دایره با مرکز O و شعاع دلخواه را به گونه‌ای رسم می‌کنیم تا d را در A و B قطع کند.

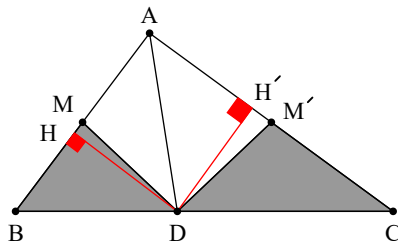
۲ - از B به مرکز دایره وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند:

۳ - D را به A وصل می‌کنیم تا خط عمود بر d به دست آید. (زاویه DAB محاطی روبه‌رو به قطر است و برابر 90° می‌باشد).

۴ - از A به مرکز دایره وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را در C قطع کند.

۵ - C را به D وصل می‌کنیم تا خط عمود بر AD به دست آید. (زاویه ADC محاطی روبه‌رو به قطر است و برابر 90° می‌باشد). خط‌های d و d' مطابق شکل هر دو بر AD عمودند پس با هم موازیند و با استفاده از یک کمان توانستیم به هدف مطلوبمان برسیم.

۱۳. در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر بزرگ‌تر است:



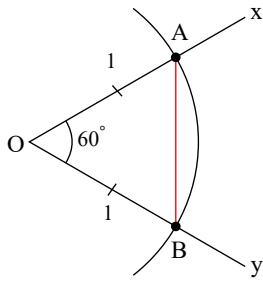
$$\hat{B} > \hat{C} \rightarrow AC > AB \rightarrow 2CM' > 2BM \rightarrow CM' > BM$$

$D \rightarrow DH = DH'$ روی نیمساز $\hat{A}$ است.

$$\frac{S_{\triangle BDM}}{S_{\triangle DM'C}} = \frac{\cancel{DH} \times BM}{\cancel{DH'} \times CM'} = \frac{BM}{CM'} < 1$$

۱۴. گزاره یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست بودن آن بر ما معلوم نباشد. بنابراین همه عبارتهای ذکر شده یک گزاره هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵



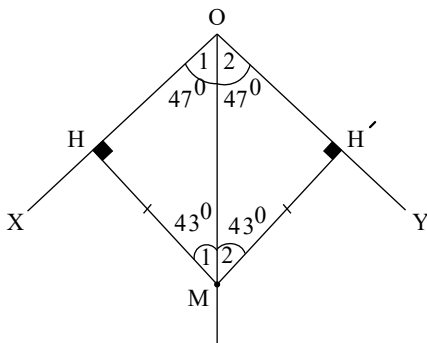
$$\left. \begin{array}{l} R > \frac{AB}{2} \\ OA = OB = AB = 1 \end{array} \right\} \rightarrow R > \frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶ با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی مثلث برابر 180° است داریم:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \rightarrow 2x + 10^\circ + x + 40^\circ + 4x - 10^\circ = 180^\circ \\ \rightarrow 7x + 40^\circ &= 180^\circ \rightarrow 7x = 140^\circ \rightarrow x = 20^\circ \\ \rightarrow \hat{A} &= 50^\circ \text{ و } \hat{B} = 60^\circ \text{ و } \hat{C} = 70^\circ \end{aligned}$$

چون $\hat{A} = 50^\circ$ کوچک‌ترین زاویه است پس ضلع روبه‌رو به آن یعنی BC کوتاه‌ترین ضلع می‌باشد.

در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷



$$\triangle OHM : \hat{M}_1 < \hat{O}_1 < \hat{H} \rightarrow OH < HM < OM \xrightarrow{MH'=MH} OH < MH' < OM$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸ برای رسم مراحل زیر را طی می‌کنیم:

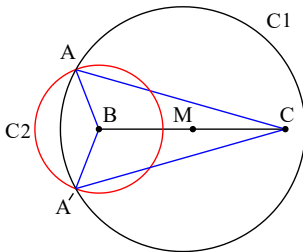
۱- ضلع $BC = 7$ را رسم می‌کنیم.

۲- وسط ضلع BC را مشخص کرده (با استفاده از رسم عمود منصف) و آن را M می‌نامیم.

۳- چون $AM = 5$ بنابراین نقطه A روی دایره‌ای به مرکز M با شعاع ۵ قرار دارد. این دایره را رسم می‌کنیم. (دایره C_1)

۴- چون $AB = 2$ بنابراین نقطه A روی دایره به مرکز B با شعاع ۲ قرار دارد. این دایره را رسم می‌کنیم. (دایره C_2)

۵- نقطه برخورد دو دایره C_1 ، رأس A را مشخص می‌کنند. از این نقاط به C و B وصل می‌کنیم تا مثلث مطلوب به دست آید. توجه: چون دو مثلث ABC و $A'BC$ هم‌نهشت هستند یک مثلث مطلوب وجود دارد.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹ با توجه به شکل زیر و خواص نیمساز یک زاویه داریم:

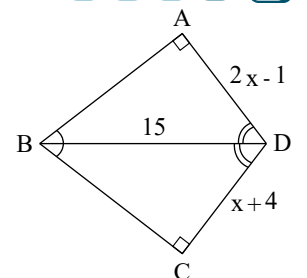
$$AD = DC \Rightarrow 2x - 1 = x + 4 \Rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow AD = DC = 9$$

$$\triangle ABD : BD^2 = AD^2 + AB^2 \Rightarrow 225 = 81 + AB^2$$

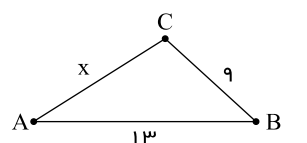
$$\Rightarrow AB = 12 \Rightarrow BC = 12$$

$$ABCD \text{ محیط} = 9 + 9 + 12 + 12 = 42$$



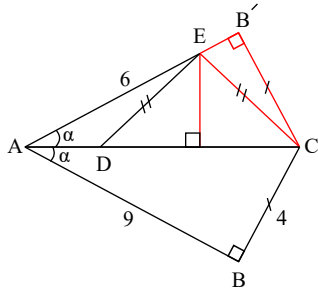
۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰ با توجه به نامساوی مثلثی داریم:

$$|AB - BC| < AC < AB + BC \rightarrow |13 - 9| < AC < 13 + 9 \rightarrow 4 < AC < 22$$



که تنها گزینهٔ ۴ در این بازه قرار دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱



$$\triangle ACB' \cong \triangle ACB \text{ (وز)} \rightarrow \begin{cases} CB' = CB = 4 \\ AB' = AB = 6 \end{cases}$$

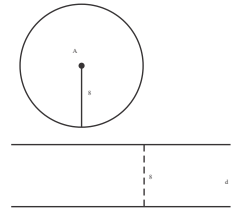
$$EB' = AB' - AE = 6 - 3 = 3$$

$$\triangle EB'C : EC^2 = EB'^2 + B'C^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \rightarrow EC = 5$$

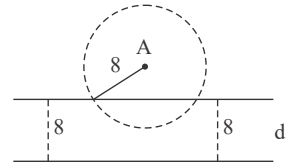
$E \rightarrow ED = EC = 5$ روی عمود منصف DC قرار دارد.

نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۸ واحد باشند، دو خط موازی d و به فاصله ۸ واحد از آن و نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ۸ باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۸ قرار دارند. با توجه به شکل زیر، حالت‌های زیر را می‌توانیم داشته باشیم:

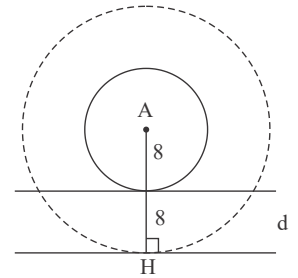
۱) $AH > 16 \Rightarrow$ صفر نقطه برخورد



۳) $0 \leq AH < 16$ دو نقطه برخورد



۲) $AH = 16 \Rightarrow$ یک نقطه برخورد



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

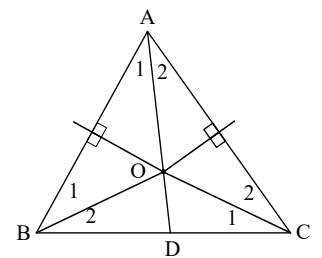
$$AB \text{ روی عمود منصف } O \rightarrow OB = OA \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$AC \text{ روی عمود منصف } O \rightarrow OA = OC \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \hat{BOD} \rightarrow \text{زاویه خارجی مثلث } \triangle AOB \\ \hat{A}_2 + \hat{C}_2 = \hat{COD} \rightarrow \text{زاویه خارجی مثلث } \triangle AOC \end{array} \right.$$

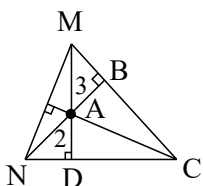
$$\Rightarrow 2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 = \hat{BOD} + \hat{COD}$$

$$2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = \hat{BOC} \rightarrow \hat{BOC} = 2\hat{A}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

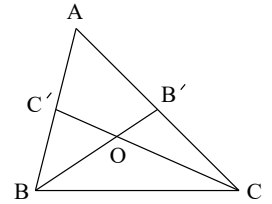
با کمی دقت متوجه می‌شویم که MD و BN برای مثلث CMN حکم ارتفاع را دارند. پس CA نیز بخشی از ارتفاع گذرنده از رأس C است و امتداد آن بر ضلع مقابلش عمود است.



فرض کنیم O مرکز ثقل مثلث باشد، با توجه به اینکه میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند، داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

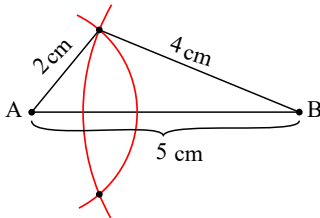
$$OB = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}(6) = 4 \quad \text{و} \quad OC = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3}(9) = 6$$



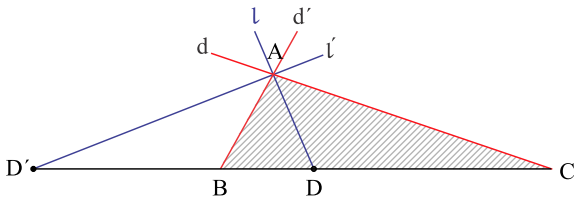
با توجه به این که $OC \not\leq BC + OB$ نتیجه می گیریم مثلث BOC قابل رسم نیست و در نتیجه مثلث ABC قابل رسم نخواهد بود.

۲۶ با استفاده از کاربرد مکان هندسی، دهانه پرگار را به اندازه ۲ سانتی متر باز کرده و به مرکز A کمانی رسم می کنیم. به همین ترتیب کمانی به شعاع ۴ سانتی متر به مرکز B ترسیم می کنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می کنند.

این دو نقطه دارای یک ویژگی مشترک هستند. هر دو به اندازه ۲ سانتی متر از نقطه A و به اندازه ۴ سانتی متر از نقطه B فاصله دارند.



۲۷ مکان هندسی نقاطی که از خطهای متقاطع شامل AC و AB (d و d') به یک فاصله اند نیمسازهای داخلی و خارجی A هستند. (ℓ و ℓ') که ضلع BC و امتداد آن را به ترتیب در نقطه های D و D' قطع می کنند و مسئله دو جواب دارد.



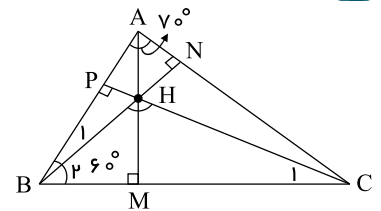
۲۸ با توجه به اطلاعات سؤال شکل زیر را رسم می کنیم: برای به دست آوردن $\hat{B}HC$ ابتدا $\hat{B}_1$ و $\hat{C}_1$ را می یابیم:

$$\triangle ABN \rightarrow \hat{N} = 90^\circ, \hat{A} = 70^\circ \rightarrow \hat{B}_1 = 20^\circ \rightarrow \hat{B}_2 = 40^\circ$$

$$\triangle ABC \rightarrow \hat{A} = 70^\circ, \hat{B} = 60^\circ \rightarrow \hat{C} = 50^\circ$$

$$\triangle BPC \rightarrow \hat{P} = 90^\circ, \hat{B} = 60^\circ \rightarrow \hat{C}_1 = 30^\circ$$

$$\triangle BHC \rightarrow \hat{B}_2 = 40^\circ, \hat{C}_1 = 30^\circ \rightarrow \hat{BHC} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$$



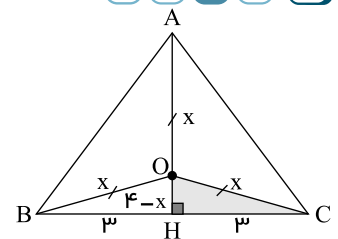
۲۹ نقطه همرسی عمودمنصف ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است. بنابراین: $OA = OB = OC = x$

$$\triangle AHC : AH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

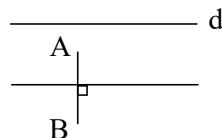
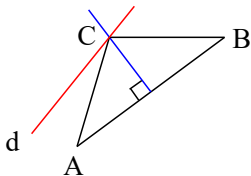
$$OH = AH - OA = 4 - x$$

$$\triangle OHC : OH^2 + HC^2 = OC^2 \rightarrow (4 - x)^2 + 3^2 = x^2 \rightarrow \cancel{x^2} - 8x + 16 + 9 = \cancel{x^2} \rightarrow x = \frac{25}{8}$$

$$OH = 4 - x = 4 - \frac{25}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$$



۳۰ برای رسم این مثلث کافی است عمودمنصف پاره خط AB را رسم کرده و محل برخورد آن با خط d را C بنامیم. در این صورت مثلث ABC جواب مسئله است. در صورتی که عمودمنصف AB خط d را در یک نقطه قطع کند مسئله یک جواب دارد.



و اگر عمودمنصف AB با خط d موازی باشد، مسئله جواب ندارد.

و چنانچه عمودمنصف AB بر خط d منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴

۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴